РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - IV РАЗЕД

1. (МЛ 46-3) Како је 72504 : 36 = 2014 (**5 бодова**) и 3292510 : 1634 = 2015 (**5 бодова**) то је други количник већи од првог и то за 1 (**10 бодова**).
2. Збир два двоцифрена броја је увек мањи од 200 па је $D = 1$ (**3 бода**). Како је цифра десетица сабирака једнака цифри десетица збира, то је могуће само ако постоји пренос са места јединица сабирака (дакле $L > 4$) и ако је $M = 9$ (**5 бодова**). Дакле, имамо да је $\overline{9L}+\overline{9L}=\overline{19S}$. Провером добијамо да су сва решења 95 + 95 = 190 (**3 бода**), 96 + 96 = 192 (**3 бода**), 97 + 97 = 194 (**3 бода**), 98 + 98 = 196 (**3 бода**).
3. Збир бројева на свим картонима је 1 + 2 + 3 + ... + 18 + 19 = 190 (**5 бодова**). Ако са x означимо збир бројева на картонима у једној групи, онда је x + 40 збир бројева на картонима у другој групи. Како је $x + (x + 40) = 190$, закључујемо да су збирови на картонима у групама 75 и 115 (**10 бодова**). Како је 1 + 2 + 3 + 17 + 18 + 19 + 15 = 75 (**5 бодова**), то је могуће поделити картоне у две групе са траженом особином.
4. Означимо страницу квадрата са a. Обим дате фигуре састоји се од 16 страница квадрата, па је $16a = 32\text{cm}$, одакле добијамо да је страница квадрата 2cm (**12 бодова**). Како се фигура састоји од 8 квадрата, то је тражена површина $8 \cdot a \cdot a = 32\text{cm}^2$ (**8 бодова**).
5. Када је записао све једноцифрене бројеве, Бранко је записао 9 цифара. Када је записао све двоцифрене бројеве записао је још 180 цифара. Дакле, за све једноцифрене и двоцифрене бројеве Бранко је записао 189 цифара. До 2012 места, остало је да запише још 1823 цифре. Како је за запис троцифреног броја потребно 3 цифре, Бранко ће на преосталих 1823 места записа 607 троцифрених бројева и још 2 цифре 608. броја (јер је количник при дељењу броја 1823 са 3 једнак 607 и остатак 2). 608. троцифрени број је 707, а његова друга цифра у запису је 0, па је тражена цифра 0 (**20 бодова**).

Министарство просвете и науке Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

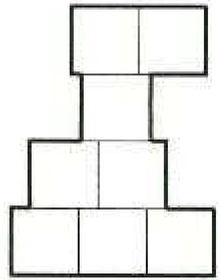
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
31.03.2012.
IV РАЗРЕД

1. Шта је веће 72504 : 36 или 3292510 : 1634 и за колико?

2. Дешифруј сабирање
$$ML + ML = DMS$$
ако истим словима одговарају исте цифре, а различитим словима различите цифре. Одреди сва решења.

3. Диана је на сваком од 19 картона исписала по један од бројева од 1 до 19. Може ли Диана поделити картоне у две групе тако да збир бројева у једној групи буде за 40 већи од збира бројева у другој групи?

4. Фигура на слици је састављена од 8 истих квадрата. Обим фигуре на слици је 32cm. Израчунај њену површину.



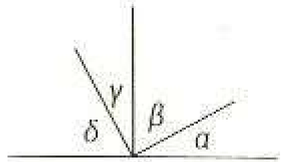
5. Бранко је записао број 1 и иза њега почео редом да дописује природне бројеве
123456789101112131415...99100101102...
Која цифра се налази на 2012 месту у овом Бранковом запису?

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - V РАЗЕД

1. а) 12 станова (**7 бодова**); б) 3 дана (**7 бодова**); в) 3 молера (**6 бодова**).

2. (МЛ 44-3) Нека је и са леве и са десне стране броја 2012 дописана цифра a. Да би тражени шестоцифрени број $\overline{a2012a}$ био дељив са 12 он мора бити дељив са 3 и 4. Због дељивости са 4, његов двоцифрени завршетак може бити само 24 или 28 (**10 бодова**), па у обзир долазе бројеви 420124 и 820128. Збир цифара првог броја је 13 и није дељив са 3. Број 820128 има збир цифара 21 и дељив је са 3, па је једино решење број 820128 (**10 бодова**).

3. Како је, по услову задатка, $\alpha + \beta = 90°$ и $\gamma + \delta = 90°$, то је $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$ (**10 бодова**). Сада је $\alpha + \delta = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) - (\beta + \gamma) = 180° - 90° = 90°$, па је $\frac{\alpha+\delta}{2} = 45°$ (**10 бодова**).



4. Померањем децималне запете за једно место удесно добијамо број који је 10 пута већи од претходног. Ако први број који је Воја записао обележимо са x, тада је други број $10x$ (**5 бодова**), а трећи, како је 10 пута већи од другог је $10 \cdot 10x = 100x$ (**5 бодова**). Сада имамо да је $x + 10x + 100x = 2233{,}32$ одакле добијамо да је $x = 20{,}12$. Дакле, Воја је записао бројеве 20,12; 201,2 и 2012 (**10 бодова**).

5. Прва овца за један дан поједе 1 пласт сена, друга овца поједе $\frac{1}{2}$, трећа $\frac{1}{3}$, ... осма $\frac{1}{8}$ пласта сена. Дакле, прве две овце за један дан поједу $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ пласта сена(**6 бодова**), док преостале поједу $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{341}{280}$ пласта сена (**7 бодова**). Како је $\frac{341}{280}<\frac{420}{280}=\frac{3}{2}$, то прве две овце поједу више сена за један дан, па ће и брже појести пласт сена (**7 бодова**).

Министарство просвете и науке Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
31.03.2012.
V РАЗРЕД

1. Три молера за три дана окрече три стана.
а) Колико станова окречи шест молера за шест дана?
б) За колико ће дана девет молера окречити девет станова?
в) Колико молера је потребно да за дванаест дана окрече дванаест станова?

2. Броју 2012 дописати са леве и са десне стране једну исту цифру тако да добијени шестоцифрени број буде дељив са 12.

3. Дата су 4 надовезана угла α, β, γ и δ тако да су свака два узастопна угла комплементна (било која два од ових углова имају највише један заједнички крак). Израчунај $\frac{\alpha+\delta}{2}$.

4. Воја је записао три броја. Други од њих је добио када је у првом броју децималну запету померио за једно место у десно. Трећи од њих је добио када је у другом броју децималну запету померио за једно место у десно. Када је на крају сабрао три записана броја добио је збир 2233,32. Које бројеве је Воја записао?

5. Од осам Бориних оваца прва би пласт сена појела за 1 дан, друга би исти пласт појела за 2 дана, трећа би исти пласт појела за 3 дана, ..., осма за 8 дана. Да ли ће пласт сена пре појести прва и друга овца заједно или преостале овце заједно?

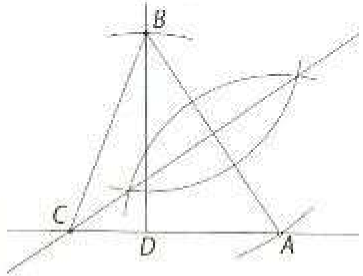
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VI РАЗЕД

1. (МЛ 44-3)

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(3-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(4-\frac{4}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(9-\frac{9}{10}\right):14\frac{2}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{16}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{81}{10}:\frac{72}{5}.$$

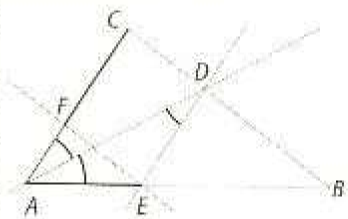
После скраћивања одговарајућих имениоца са бројиоцем (2 са 4, 3 са 9, 4 са 16, итд.) добијамо следеће: $\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\ldots\cdot\frac{9}{2\cdot 5}\cdot\frac{5}{8\cdot 9}$. Скраћивањем преосталих бројева у имениоцу са истим бројевима у бројиоцу остаће нам производ $3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=2520$ (**20 бодова**).

2. Означимо подножје висине из темена B основице AB на крак AC са D. Троугао ABD је правоугли и позната је дужина његове хипотенузе и једне катете, па га можемо конструисати (**10 бодова**). Како је троугао ABC једнакокрак, то се теме C налази на симетрали основице троугла AB. Конструкцијом симетрале странице AB у пресеку са правом AD добијамо треће теме троугла (**10 бодова**).



3. $\overline{xyzxyz}=\overline{xyz000}+\overline{xyz}=1000\cdot\overline{xyz}+\overline{xyz}=1001\cdot\overline{xyz}$ (**10 бодова**). Сада имамо $\overline{xx}\cdot\overline{yz}\cdot\overline{xyz}=1001\overline{xyz}$, $1001\overline{xyz}-\overline{xx}\cdot\overline{yz}\cdot\overline{xyz}=0$, одакле је $\overline{xyz}\cdot(1001-\overline{xx}\cdot\overline{yz})=0$ (**5 бодова**). Овај производ је једнак 0 ако је $\overline{xx}\cdot\overline{yz}=1001$. Како је $1001=7\cdot 11\cdot 13=11\cdot 91=77\cdot 13$, закључујемо да је $x=7$, $y=1$ и $z=3$ (**5 бодова**).

4. Права AD је симетрала $\measuredangle BAC$ па је $\measuredangle BAD=\measuredangle CAD$. $\measuredangle CAD=\measuredangle ADE$ (углови са паралелним крацима) па је $\measuredangle DAE=\measuredangle ADE$ (**5 бодова**). Сада је троугао ADE једнакокрак и $AE=DE$ (**5 бодова**). Четвороугао $EDCF$ је паралелограм (наспрамне странице су конструисане тако да буду паралелне) па је $CF=DE$. Дакле, како је $AE=DE$ и $CF=DE$, то је и $AE=CF$ (**10 бодова**).



5. На основу трећег броја видимо да у запису Мајиног броја нема цифара 2 и 5. Сада на основу прва два броја закључујемо да се у запису Мајиног броја појављују цифре 1, 3, 4 и 6 (**5 бодова**). Ако је у првом броју погодио позицију цифре 1, то значи да је у другом броју погодио позицију цифре 3 и у том случају Мајин број је 6314. Међутим, ако је погодио позицију цифре 4 у првом броју, онда у другом броју може бити добра само позиција цифре 6 па је тражени број 4163 (ако је погодио позицију цифре 3 онда и цифра 1 и цифра 6 морају бити на четвртој позицији што је немогуће). Дакле, како за задате услове постоје две тачне могућности Ненад не може из четвртог пута са сигурношћу да каже тачан број већ само може да погађа (**15 бодова**).

Министарство просвете и науке Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
31.03.2012.
VI РАЗРЕД

1. Израчунај вредност израза:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(3-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(4-\frac{4}{5}\right)\cdots\left(9-\frac{9}{10}\right):14\frac{2}{5}.$$

2. Конструиши једнакокраки троугао ако је основица троугла 5cm и висина која одговара краку 4cm.

3. Дешифруј множење $\overline{xx}\cdot\overline{yz}\cdot\overline{xyz}=\overline{xyzxyz}$, ако истим словима одговарају исте цифре, а различитим словима различите цифре.

4. У троуглу ABC симетрала угла BAC сече страницу BC у тачки D. Права која садржи тачку D и паралелна је страници AC сече страницу AB у тачки E. Права која садржи тачку E и паралелна је са BC сече страницу AC у тачки F. Докажи да је $AE=FC$.

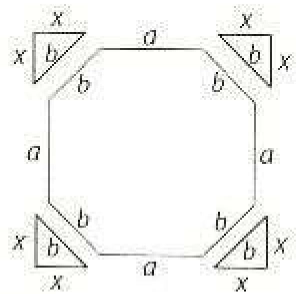
5. Користећи цифре 1, 2, 3, 4, 5, 6 Маја је написала један четвороцифрени број (једна цифра може више пута да се искористи). Ненад је хтео да погоди тај број, па је рекао први пут 4215 и погодио је две цифре али само је једну рекао на одговарајућем месту. Други пут је рекао 2365 и опет погодио две цифре и то једну на одговарајућем месту. Трећи пут је рекао 5525, али тада није погодио ни једну цифру. Да ли може из четвртог пута да каже Мајин број, или још увек може само да погађа? Образложи одговор.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VII РАЗЕД

1. (МЛ 44-4) Групишући чланове израза на следећи начин $-(x^2-2x)-(z^2-6z)-y^2$ и допуњујући изразе у заградама до квадрата бинома, добијамо $-(x^2-2x+1-1)-(z^2-6z+9-9)-y^2=-(x-1)^2+1-(z-3)^2+9-y^2$ (**10 бодова**). Како је вредност квадрата реалног броја ненегативан број, а у изразу је испред сваког квадрата бинома предзнак „–", дати израз има највећу вредност за $(x-1)^2=0$, $(z-3)^2=0$ и $y^2=0$, тј. $x=1$, $z=3$ и $y=0$, и његова вредност у том случају је 10 (**10 бодова**).

2. $n=2^{20}\cdot3^{15}\cdot5^{10}=2^{10}\cdot3^{15}\cdot10^{10}=6^{10}\cdot3^{5}\cdot10^{10}$.
   а) n се завршава са 10 нула (**5 бодова**).
   б) Како је последња цифра броја 6^{10} цифра 6, а броја 3^5 цифра 3, то је прва цифра с десна на лево различита од нуле 8 ($...6\cdot...3=...8$) (**10 бодова**).
   в) $21\cdot16\cdot11=3696$ (**5 бодова**).

3. Страница квадрата је 12cm (**2 бода**). Како је обим осмоугла једнак збиру обима четири подударна троугла и како су странице означене са b све међусобно једнаке, имамо да је $8x=4a$, односно $a=2x$. Сада је $2x+a=12$cm, па је $a=6$cm, $x=3$cm (**8 бодова**). Применом Питагорине теореме на правоугли троугао добијамо да је $b=3\sqrt{2}$cm. Обим осмоугла је $O=4a+4b=12\cdot(2+\sqrt{2})$cm (**5 бодова**). Површина осмоугла једнака је разлици површине квадрата и четири једнакокрако правоугла троугла. Дакле, $P=126\text{cm}^2$ (**5 бодова**).



4. Како је:
$x^6-4x^5+4x^4-81x^2+324x-324=0$, $x^4(x^2-4x+4)-81\cdot(x^2-4x+4)=0$,
$(x^4-81)(x^2-4x+4)=0$ (**5 бодова**), $(x^2+9)(x-3)(x+3)(x-2)^2=0$ (**10 бодова**),
решења су $x\in\{3,-3,2\}$ (**5 бодова**).

5. Ако је n укупан број тачака, број дужи који се може добити спајањем тих n тачака је $\frac{n(n-1)}{2}$ (**5 бодова**). Како је $\frac{11\cdot10}{2}<60<\frac{12\cdot11}{2}$ закључујемо да је број тачака које је Воја нацртао 12. Како је укупан број дужи са 11 тачака једнак 55, закључујемо да је из последње тачке повукао $60-55=5$ дужи (**15 бодова**).

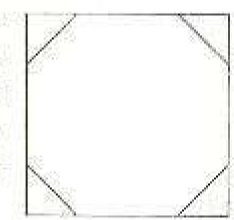
Министарство просвете и науке Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
31.03.2012.
VII РАЗРЕД

1. За које вредности променљивих x, y и z је вредност израза
$$2x+6z-x^2-y^2-z^2$$
највећа? Одреди вредност тог израза.

2. Дат је природан број $n=2^{20}\cdot3^{15}\cdot5^{10}$.
   а) Са колико нула се завршава број n?
   б) Која је прва цифра, с десна на лево, у броју n која је различита од 0?
   в) Колико различитих делилаца има број n?

3. Од квадрата површине 144cm^2 „одсечена" су четири (међусобно) подударна једнакокрака правоугла троугла (види слику). Обим новодобијеног осмоугла једнак је збиру обима „одсечених" троуглова. Израчунај обим и површину тог осмоугла.



4. Реши једначину у скупу реалних бројева:
$$x^6-4x^5+4x^4-81x^2+324x-324=0.$$

5. Воја је означио на кружници n тачака. $n-1$ тачку је спојио сваку са сваком, а онда је и n-ту тачку спојио са некима од њих. Када је пребројао, видео је да је повукао 60 дужи. Колико дужи је повукао из тачке коју није спојио са свим осталим тачкама?

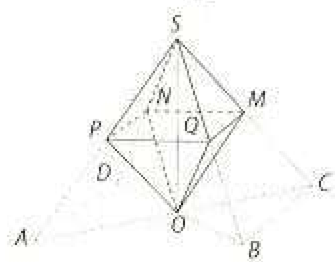
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VIII РАЗЕД

1. (МЛ 44-4) Осе координатног система и график формирају троугао чије су катете 1 и 2 (**5 бодова**). Тражено растојање је висина која одговара хипотенузи овог троугла. Хипотенуза овог троугла је $\sqrt{5}$ (**5 бодова**). Како је површина овог троугла 1, висина која одговара хипотенузи, а самим тим и тражено растојање, је $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (**10 бодова**).

2. $||2012-x|-2011| = 2013$ па је $|2012-x|-2011 = 2013$ или $|2012-x|-2011 = -2013$ (**5 бодова**). Сада је $|2012-x| = 4024$ док је случај $|2012-x| = -2$ немогућ (**5 бодова**). Дакле имамо $2012-x = 4024$ или $2012-x = -4024$ па је $x = -2012$ (**5 бодова**) или $x = 6036$ (**5 бодова**).

3. Висину пирамиде рачунамо као катету правоуглог троугла OBS. Како је $BS = a$ и $BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, то је $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (**5 бодова**). $PQ = QM = MN = NP = \frac{a}{2}$ (средње линије једнакостраничних троуглова странице a). $PS = QS = MS = NS = \frac{a}{2}$ (половине ивица дужина a). $PO = QO = MO = NO = \frac{a}{2}$ (средње линије троуглова и паралелне са страницом дужине a) (**5 бодова**). Дакле, тело $OPQMNS$ се састоји од две једнакоивичне четворостране пирамиде странице $\frac{a}{2}$ које су спојене по основи. Површина тела се састоји од осам троуглова и једнака је $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (**5 бодова**). Запремина је једнака $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$ (**5 бодова**).



4. Нека је x број коцки ивице 1cm, y број коцки ивице 2cm и z број коцки ивице 3cm. Тада је $x + 8y + 27z = 13^3$ и $x + y + z = 2012$ (**5 бодова**). Одузимањем друге једначине од прве добијамо $7y + 26z = 185$. Како је $0 \leq 26z \leq 185$, то је $0 \leq z \leq 7$. Само у случају $z = 2$ имао да је $y = 19$, а заменом у првој једначини $x = 1991$. Дакле, могуће је расећи дату коцку на 2012 мањих и то 1991 коцку чија је ивица 1cm, 19 коцки чија је ивица 2cm и 2 коцке чија је ивица 3cm (**15 бодова**).

5. Означимо са k_1 круг уписан у троугао ACD, а са k_2 круг уписан у троугао ABC. Означимо са P тачку додира круга k_1 и странице AD, а са F тачку додира круга k_2 и странице AB. Троуглови AFS и ANS су подударни јер је $AS = AS$, $SN = SF = r$, $\measuredangle SFA = \measuredangle SNA = 90°$ па је $AN = AF = a - r$ (**10 бодова**). Аналогно показујемо да су троуглови APO и AMO подударни па је $AM = AP = b - r$. Сада је $MN = AN - AM = a - b$ (**10 бодова**).

Признавати и максималним бодовати свако тачно решење које није у кључу.

Министарство просвете и науке Републике Србије

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

31.03.2012.

VIII РАЗРЕД

1. Одреди растојање координатног почетка од графика функције
$$y = -2x + 2.$$

2. Реши једначину
$$|2013 - ||2012 - x| - 2011|| = 0.$$

3. Ивица четворостране једнакоивичне пирамиде $SABCD$ је a. Тачке P, Q, M, N су средишта бочних ивица AS, BS, CS и DS, редом, а тачка O је подножје висине пирамиде из врха S. Израчунај површину и запремину тела $OPQMNS$.

4. Да ли се коцка ивице 13cm може исећи на 2012 мањих коцки чије су ивице 1cm, 2cm или 3cm?

5. Нека је $ABCD$ правоугаоник са страницама a и b ($a > b$). Кружнице уписане у троуглове ABC и ACD додирују дијагоналу AC у тачкама M и N. Одреди дужину дужи MN.