Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
05.04.2014.

IV разред

1. Користећи цифре 1, 3, 5, 7, 9 (сваку тачно једанпут) напиши један троцифрени и један двоцифрени број тако да:
   а) њихов збир буде највећи могући;
   б) њихов збир буде најмањи могући;
   в) њихова разлика буде највећа могућа;
   г) њихова разлика буде најмања могућа.

2. Отац, син и ћерка имају укупно 45 година. Ћерка има онолико месеци колико отац има година, а син има два пута више месеци него ћерка. Колико година има отац, колико син, а колико ћерка?

3. Одреди шест узастопних троцифрених бројева у чијем се запису појављује тачно 11 цифара 5.

4. Дата су четири броја: *AABB*, *CDD*, *CB*, *B*. Почевши од другог, сваки број је једнак производу цифара претходног. Одреди број *AABB*. (У бројевима су једнаке цифре замењене истим словима, а различите различитим).

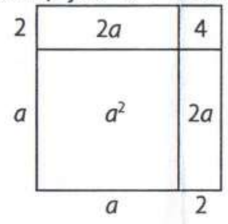
5. Ако се ивица коцке повећа за 2cm, њена површина се повећа за 504cm^2. Колика је површина коцке пре повећања странице?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Решење

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. (МЛ 48/1) а) $1024 = 973 + 51 = 971 + 53 = 953 + 71 = 951 + 73$ (**5 бодова**);
б) $196 = 137 + 59 = 139 + 57 = 157 + 39 = 159 + 37$ (**5 бодова**);
в) $975 - 13 = 962$ (**5 бодова**); г) $135 - 97 = 38$ (**5 бодова**).
Напомена: За максималан број бодова у делу а) и б) довољно је једно решење.
2. Ако ћерка има x месеци, тада брат има $2 \cdot x$ месеци, а отац $12 \cdot x$ месеци (јер има x година). Они укупно имају $45 \cdot 12 = 540$ месеци. Дакле, $x + 2 \cdot x + 12 \cdot x = 540$ (**14 бодова**), $15 \cdot x = 540$, $x = 36$. Дакле, отац има 36 година (**2 бода**), ћерка 36 месеци, тј. 3 године (**2 бода**), а брат 6 година (**2 бода**).
3. Тражени бројеви су 549, 550, 551, 552, 553 и 554 (**20 бодова**. За максималан број бодова довољно је да ученик/ца само наведе бројеве).
4. (МЛ 47/2) Како је $C \cdot B = B$, то је $B = 0$ или $C = 1$. Ако је $B = 0$, тада је и производ цифара броја *AABB* једнак 0, што није тачно. Дакле, $C = 1$ (**5 бодова**. Бодовати максимално и ако ученик не разматра случај $B = 0$). Како је $1 \cdot D \cdot D = \overline{1B}$, D је цифра коју када помножимо собом даје број друге десетице. То је једино могуће за $D = 4$. Како је $4 \cdot 4 = 16$, то је $B = 6$ (**10 бодова**). Сада имамо $A \cdot A \cdot 6 \cdot 6 = 144$, тј. $A \cdot A = 4$, одакле је $A = 2$ (**5 бодова**). Дакле, тражени број *AABB* је 2266.
5. Нека је ивица коцке, пре повећања, једнака a. Након повећања ивица коцке је $a + 2$. Површина једне стране коцке повећаће се за $4a + 4$ (види слику). Укупна површина коцке повећаће се за $6 \cdot (4a + 4) = 504$ (**10 бодова**), одакле је $a = 20$cm (**8 бодова**). Површина коцке пре повећања странице је $6 \cdot a^2 = 2400$cm^2 (**2 бода**).



Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа 05.04.2014.
V разред

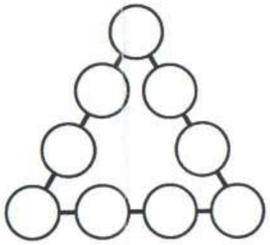
1. Помоћу цифара 0, 1, 3, 5, 7 написани су сви могући четвороцифрени бројеви са различитим цифрама. Колико међу њима има дељивих са 5?

2. Одреди све нескративе разломке $\frac{a}{b}, a \in N, b \in N, \frac{a}{b} < 1$, тако да је збир бројиоца и имениоца 37, а при томе разломцима одговара коначан децимални запис.

3. Комад сира има облик коцке. На колико се једнаких делова тај сир може поделити са три резања ножем ако је свако резање паралелно некој страни коцке?

4. Ана, Биља и Цеца су записале три проста броја a, b и c. Испоставило се да је $ab + bc + ca = 2016$. Коју вредност има највећи од бројева a, b и c.

5. Прецртај два пута дату слику на папир који ћеш предати. На свакој од слика, у кружиће упиши бројеве 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (сваки тачно једанпут) тако да су збирови бројева у кружићима на све три странице троугла једнаки. Како треба уписати бројеве да збир буде највећи могући, а како да буде најмањи могући? Прикажи на сликама и образложи.



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Решење

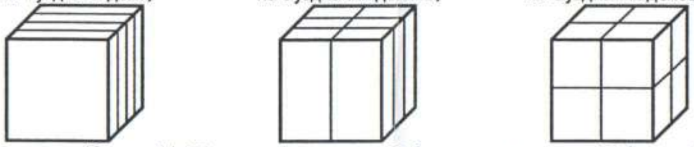
Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. Последња цифра тражених бројева може бити 0 или 5. Ако је последња цифра 0, за јединице хиљада имамо 4 могуће цифре, за стотине 3 могуће цифре и за десетице 2 цифре. Укупно $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ броја (**10 бодова**). Ако је последња цифра 5, за јединице хиљада имамо 3 могуће цифре (јер 0 не може бити на месту јединица хиљада), за стотине 3 могуће цифре и за десетице 2 цифре. Укупно $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ бројева (**10 бодова**). Дакле, међу написаним бројевима има 42 броја дељива са 5.

2. (МЛ 48/4) Разломак $\frac{a}{b}, a \in N, b \in N$ је нескратив, има коначан децимални запис и мањи је од 1 ако су a и b узајамно прости, прости чиниоци броја b су двојке и петице и $a < b$ (**2 бода**). По услову задатка је $a + b = 37$, па следи $a = 5, b = 32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; $a = 12, b = 25 = 5 \cdot 5$; $a = 17, b = 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Остали случајеви не испуњавају услове. Тражени разломци су $\frac{5}{32}, \frac{12}{25}$ и $\frac{17}{20}$ (Сваки тачно наведени разломак **6 бодова**. Ако су уз то наведени и погрешни одговори, на пример $\frac{10}{27}$, за сваки такав одговор одузети 3 бода, с тим да укупан збир буде ненегативан.)

3. Постоје 3 начина резања:

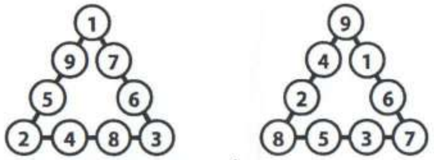
на 4 једнака дела; на 6 једнаких делова; на 8 једнаких делова.



(Једно решење (било које) **6 бодова**, два решења **13 бодова**, три решења **20 бодова**.)

4. Барем један од бројева мора бити паран јер ако су сви непарни и збир $ab + bc + ca$ је непаран. Нека је $a = 2$ (**5 бодова**). Тада је $2b + bc + 2c = 2016$. Како су $2b$ и $2c$ парни бројеви то мора и bc бити паран број, тј. један од бројева b или c мора бити паран. Нека је $b = 2$ (**10 бодова**). Тада је $4 + 4c = 2016$, одакле је $c = 503$. Како је број 503 прост, 503 је и тражено решење задатка (**5 бодова**).

5. Збир свих бројева које уписујемо у кругове је 45. Бројеви у круговима у теменима троугла се рачунају по два пута јер се налазе на две странице. Ако са a, b и c обележимо бројеве које уписујемо у кругове у теменима троугла, тада је збир бројева на једној страници $(45 + a + b + c) : 3$. Овај збир је најмањи када су бројеви a, b и c једнаки 1, 2 и 3 и једнак је 17 (**5 бодова**) (слика лево). Збир је највећи када су бројеви a, b и c једнаки 7, 8 и 9 и једнак је 23 (**5 бодова**) (слика десно).



(По **5 бодова** за сваки тачно попуњени троугао.)

Напомена: На сликама је по један од могућих распореда бројева. Максимално бодовати и сваки други тачан распоред бројева.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
05.04.2014.

VI разред

1. Вредност израза $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ је 2014. Колико чинилаца има у датом производу?

2. Одреди најмањи природан број који се завршава са 13, дељив је са 13 и има збир цифара 13.

3. Конструиши троугао ABC ако је $h_a = 3\text{cm}$, $t_a = 3{,}5\text{cm}$, $\beta = 30°$.

4. Нека је ABC произвољни оштроугли троугао, а тачке D и E, редом, подножја висина из темена A и B. Докажи да се симетрале дужи DB и EA секу на страници AB.

5. Филип саставља троуглове од палидрваца. Колико различитих троуглова може да састави ако за један троугао сме да употреби највише 10 (међусобно једнаких) палидрваца?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Решење

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

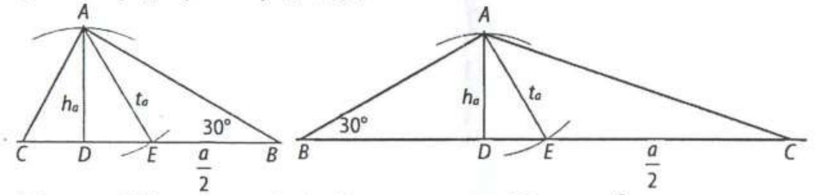
1. (МЛ 47/4) Имамо да је

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}$$
$$=\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{n+1}{\cancel{n}}=\frac{n+1}{2}$$ **(15 бодова)**.

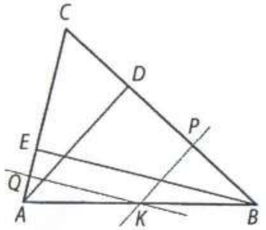
Како је $\frac{n+1}{2}=2014$, то је $n=4027$. Дакле, у датом изразу је 4026 чинилаца (**5 бодова**).

2. Нека је тражени број $\overline{A13}$. Како је $\overline{A13}=100A+13$ и како $13 \mid (100A+13)$, то $13 \mid 100A$, односно $13 \mid A$ (**5 бодова**). Са друге стране збир цифара броја $\overline{A13}$ је 13, па је збир цифара броја A једнак 9, одакле је и број A дељив са 9 (**10 бодова**). Најмањи број A који је дељив и са 13 и са 9 је 117, па је тражени број $\overline{A13}=11713$ (**5 бодова**).
Напомена: Ако ученик дође до решења „систематским пробањем", бодовати максималним бројем бодова.

3. У троуглу ABC познате су висина и тежишна дуж из темена A па је могуће конструисати правоугли троугао ADE у коме су познате катета и хипотенуза. Конструкцијом овог троугла добијамо теме A троугла (**6 бодова**). Троугао ADB је правоугли. Позната је једна катета и унутрашњи углови (30°, 60°, 90°) па га можемо конструисати. За теме B може да важи D-E-B (слика лево) (**6 бодова**) или B-D-E (слика десно) (**6 бодова**). Како је E средиште дужи BC, теме C добијамо преношењем дужине дужи BE из темена E на праву BE на супротну страну од темена B у односу на тачку E (**2 бода**).



4. Троугао ADB је правоугли, јер је AD висина троугла ABC. Симетрала странице DB је нормална на страницу BD, па је паралелна страници AD (**5 бодова**). Означимо пресек нормале са страницом BC са P, а са страницом AB са K. Дуж PK садржи средиште странице DB, паралелна је са AD па је онда средња линија троугла ADB. То значи да је тачка K средиште дужи AB (**10 бодова**). Аналогно, у троуглу ABE симетрала странице AE сече страницу AB у средишту, па и она садржи тачку K. Дакле, симетрале дужи DB и AE секу се на страници AB и то у њеном средишту (**5 бодова**).



5. Троуглове можемо саставити од 3, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 палидрваца (Немогуће је са 4 јер не постоји троугао са страницама 1, 1 и 2 палидрвца). Све могућности за дужине страница су: (1,1,1), (1,2,2), (2,2,2), (1,3,3), (2,2,3), (2,3,3), (1,4,4), (2,3,4), (3,3,3), (2,4,4), (3,3,4).
Дакле, може да састави 11 троуглова (За n тачних решења дати **2(n – 1) бодова**. Ако су наведени и погрешни одговори, на пример 1, 2, 3, за сваки такав одговор одузети 2 бода, с тим да укупан збир буде ненегативан.).

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

05.04.2014.

VII разред

1. Са D_n обележавамо број свих дијагонала конвексног многоугла са n страница. Ако је $D_{4n} : D_n = 19$, израчунај $D_{2n} : D_n$.

2. Одреди цео број a такав да су
$$m = (3a-2)(a-1) \quad \text{и} \quad n = a(2a-1)$$
узастопни парни бројеви.

3. Правилан дванаестоугао $A_1A_2...A_{12}$ уписан је у кружницу полупречника 10cm. Израчунај површину четвороугла $A_1A_3A_4A_5$.

4. У трапезу $ABCD$ са основицама AB и CD симетрале унутрашњих углова код темена A и D секу се на краку BC. Докажи да важи
$$AD = AB + CD.$$

5. Дата су четири броја: $ABBCD$, BAC, AC, C. Почевши од другог, сваки број је једнак производу цифара претходног. Одреди о којим бројевима је реч. (У бројевима су једнаке цифре замењене истим словима, а различите различитим).

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

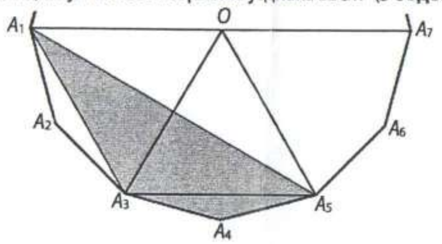
Решење

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу.

1. (МЛ 48/2) Укупан број дијагонала конвексног n-тоугла је $D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ (**3 бода**) па важи: $\dfrac{D_{4n}}{D_n} = \dfrac{4n(4n-3)}{n(n-3)} = 19$. Одавде је $4(4n-3) = 19(n-3)$, одакле је $n = 15$ (**15 бодова**) и $\dfrac{D_{30}}{D_{15}} = \dfrac{30\cdot(30-3)}{15\cdot(15-3)} = \dfrac{9}{2}$ (**2 бода**).

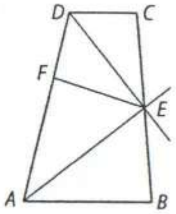
2. За узастопне парне бројеве m и n важи $|m-n| = 2$. Сада је $|m-n| = |a^2-4a+2| = 2$ (**6 бодова**). Ако је $a^2-4a+2 = 2$, тада је $a^2-4a = 0$, одакле је $a = 4$ (**4 бода**) или $a = 0$ (**4 бода**). Ако је $a^2-4a+2 = -2$, тада је $a^2-4a+4 = (a-2)^2 = 0$, одакле је $a = 2$ (**6 бодова**).

3. Тетива A_3A_5 паралелна је пречнику A_1A_7, па су теме A_1 и центар кружнице O на једнаком растојању од праве A_3A_5 (**5 бодова**) (слика). Површина четвороугла $A_1A_3A_4A_5$ једнака је збиру површина троуглова $A_3A_4A_5$ и $A_1A_3A_5$. С друге стране, површина троугла $A_1A_3A_5$ једнака је површини троугла OA_3A_5 (заједничка основица и једнаке висине), па је тражена површина једнака површини делтоида $OA_3A_4A_5$ (**10 бодова**). Тај делтоид има узајамно нормалне дијагонале дужине 10cm, па је његова површина једнака 50cm^2 (**5 бодова**).



4. Означимо пресек симетрала углова код темена A и D са E и одредимо тачку F на страници AD такву да је $\measuredangle CED = \measuredangle DEF$. Таква тачка постоји јер је $\measuredangle AED$ прав, па је $\measuredangle CED$ оштар. Троуглови CDE и FDE су подударни (заједничка страница и два налегла угла), па је $\measuredangle DCE = \measuredangle DFE$ и $DF = CD$ (**10 бодова**). Сада је $\measuredangle ABE = 180° - \measuredangle DCE = 180° - \measuredangle DFE = \measuredangle AFE$. Како троуглови ABE и AFE имају једнака два унутрашња угла, једнаки су и трећи, па је $\measuredangle FEA = \measuredangle BEA$. Троуглови ABE и AFE су подударни (заједничка страница и два налегла угла), па је $AB = AF$. Сада је $AD = AF + FD = AB + CD$, што је и требало доказати (**10 бодова**).

5. Како је $A \cdot C = C$, то је $C = 0$ или $A = 1$. Ако је $C = 0$, тада је и производ цифара броја $ABBCD$ једнак 0, што није тачно. Дакле, $A = 1$ (**5 бодова**). Како је $B \cdot C = \overline{1C}$ то C може бити или 2 или 5 (**5 бодова**). Ако је $C = 2$, тада је $B = 6$ и производ цифара броја $ABBCD$ је 612. Али тај производ не може бити 612 јер број 612 има прост делилац 17, те у овом случају нема решења (**5 бодова**). Ако је $C = 5$, тада је $B = 3$ и $1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot D = 315$, одакле је $D = 7$, па су тражени бројеви 13357, 315, 15, 5 (**5 бодова**).



Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
05.04.2014.

VIII разред

1. Докажи да је за сваки природан број n вредност израза $\frac{n^2}{2}-\frac{2n}{3}+\frac{n^3}{6}$ цео број.

2. Које године двадесетог века је рођен човек који ове године пуни онолико година колики је производ цифара године његовог рођења?

3. У правилну четворострану пирамиду уписана је коцка. Једна основа коцке је у равни основе пирамиде, а темена друге основе су у тежиштима бочних страна пирамиде. Колико пута је запремина пирамиде већа од запремине ове коцке?

4. Нека је ABC једнакостранични троугао, L тачка на страници AB, K тачка на страници BC и M пресек дужи AK и CL. Докажи: Ако се око четвороугла $BKML$ може описати кружница, онда је његова површина једнака површини троугла CAM.

5. У круг су уписани квадрат и правилни петоугао тако да им се темена не поклапају. Докажи да међу 9 лукова на које та темена деле кружницу постоји бар један којем одговара централни угао не већи од 9°.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

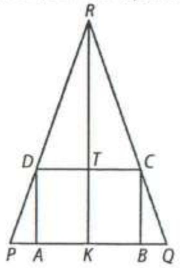
Решење

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу.

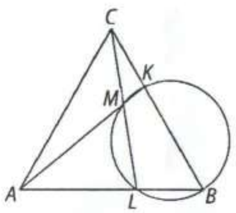
1. $\frac{n^2}{2}-\frac{2n}{3}+\frac{n^3}{6}=\frac{n^3+3n^2-4n}{6}=\frac{n^3+3n^2+2n-6n}{6}=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}-n$ (**10 бодова**). Даље је $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n^2 + 3n + 2) = n(n+1)(n+2)$. Како је међу три узастопна природна броја увек један дељив са 3 и барем један дељив са 2, добијени производ је сигурно дељив са 6 па је $\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$ природан број, а онда је и $\frac{n^3+3n^2+2n}{6}-n$ цео број (**10 бодова**).

2. (МЛ 48/3) Година рођења је облика $\overline{19xy}$. По претпоставци задатка је $1900 + 10x + y + 1 \cdot 9 \cdot x \cdot y = 2014$, одакле је $10x + y + 9 \cdot x \cdot y = 114$ (**5 бодова**). Лако се види да је $x > 1$, $y > 1$ (случајеви $x = 1$ и $y = 1$ се лако елиминишу) и $x \cdot y < 12$ (јер је $9 \cdot 12 + 10 > 114$). Следи $x < 6$, $y < 6$ (**5 бодова**). Преостају следеће могућности за $\overline{xy}$: 22, 23, 24, 25, 32, 33, 42, 52. Провером налазимо да само за $\overline{xy}=33$ и $\overline{xy}=42$ важи $1933 + 1 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 3 = 2014$ и $1942 + 1 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 2 = 2014$. Човек је рођен 1933. (**5 бодова**) или 1942. године (**5 бодова**).

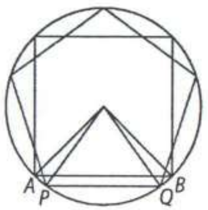
3. Ако пресечемо пирамиду равни која садржи њену висину и паралелна је једној основној ивици, добијамо пресек са слике. Ако основну ивицу пирамиде означимо са b, висину са H, а ивицу коцке са a, тада је $PQ = b$, $BC = a$, $DC = a\sqrt{2}$, $RK = H$ (**5 бодова**). Како су темена једне основе коцке у тежиштима бочних страна пирамиде, важи да су троуглови RTC и RKQ слични и $RC : CQ = 2 : 1$, па је $RT : TK = 2 : 1$, $RT = 2a$, $H = RK = 3a$ (**5 бодова**). Такође, како је $RC : RQ = 2 : 3$, то је $TC : KQ = 2 : 3$, одакле је $b=\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ (**5 бодова**). Сада је запремина пирамиде $V=\frac{9}{2}a^3$, па је запремина пирамиде 4,5 пута већа од запремине коцке (**5 бодова**).



слика уз задатак 3



слика уз задатак 4



слика уз задатак 5

4. Ако је четвороугао $BKML$ тетиван, збир наспрамних углова је 180°, па је $\measuredangle MLB = 180° - \measuredangle MKB = \measuredangle MKC$ (**5 бодова**). У троугловима AKC и CLB једнака су по два унутрашња угла ($\measuredangle CLB = \measuredangle AKC$, $\measuredangle CBL = \measuredangle ACK = 60°$) и преостали трећи углови су им једнаки. У овим троугловима једнаке су по једна страница и два налегла угла, па су подударни и имају једнаке површине (**10 бодова**). Сада је $P_{\Delta CAM} = P_{\Delta AKC} - P_{\Delta CKM} = P_{\Delta CLB} - P_{\Delta CKM} = P_{BKML}$ (**5 бодова**).

5. Кружном луку изнад једне странице квадрата одговара централни угао од 90°, а изнад једне стране правилног петоугла угао од 72°. На једном кружном луку изнад странице квадрата, на пример AB, морају се наћи два темена правилног петоугла, на пример P и Q (види слику). Збир централних углова којима одговарају лукови AP и BQ је 90° – 72° = 18°. Посматрајмо мањи од ових лукова. Мањем луку одговара мањи централни угао, а како је њихов збир 18°, централни угао над мањим луком биће мањи од 9°. Ако су лукови једнаки, једнаки су и централни углови, по 9°, па у оба случаја важи тврђење задатка (**20 бодова**).