VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Због $x^2-3x+\frac{9}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$, $4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$ и $\sqrt{3}-1>0$, једначина се своди на $\left|x-\frac{3}{2}\right|=\sqrt{3}$ **[12 поена]**. Њена решења су $\frac{3}{2}+\sqrt{3}$ и $\frac{3}{2}-\sqrt{3}$ **[8 поена]**. (Признати и ако су решења записана у облику $\frac{5}{2}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$, $\frac{1}{2}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$) [Ако такмичар изостави знак апсолутне вредности код $\left|x-\frac{3}{2}\right|$ или добије само једно решење последње једначине, бодује се са 0 поена.]

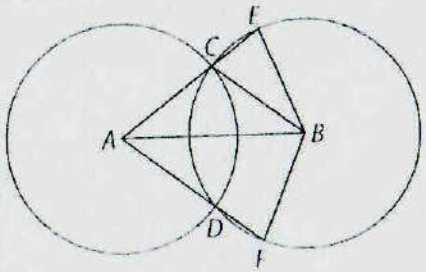
2. **(МЛ 53-3)** *I решење.* $1+7+7^2+7^3+\ldots+7^{2016}+7^{2017}+7^{2018}$
$=(1+7+7^2)+7^3\cdot(1+7+7^2)+\ldots+7^{2016}\cdot(1+7+7^2)=57\cdot(1+7^3+\ldots+7^{2016})$,
што је дељиво са 19 јер је $57=19\cdot3$ [**20 поена**. Ако се констатује да је $1+7+7^2=$
57 дељиво са 19, без извођења даљих закључака: 7 поена].

II решење. Остаци степена броја 7 при дељењу са 19 су, редом, 7, 11, 1, 7, 11, 1, ... [7
поена]. Зато збир било која три узастопна степена даје остатак $7+11+1=19$, тј.
дељив је са 19 [**7 поена**]. Како је $3\mid2019$, то груписањем сабирака датог збира
(који има 2019 сабирака) у групе по три узастопна, добијамо да је $19\mid S$ [**6 поена**].

3. **(МЛ 53-2)** Ако са a означимо основну ивицу, а са H висину призме, из услова
задатка добијамо да је $6aH=648$ и $a^2+H^2=225$ [**4 поена**]. Из $2aH=216$ и $a^2+H^2=$
225 следи да је $(a+H)^2=a^2+H^2+2aH=225+216=441$, па је $a+H=21$ [**4 поена**].
Из $a+H=21$ и $aH=108$ добија се да постоје две могућности:
1°) $a=12$, $H=9$ [**3 поена**], и 2°) $a=9$, $H=12$ [**3 поена**]. У првом случају површина је
$(432\sqrt{3}+648)\mathrm{cm}^2$ [**3 поена**], а у другом $(243\sqrt{3}+648)\mathrm{cm}^2$ [**3 поена**].

4. $(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)+16$ [**8 поена**] $=(4n^2-1)(4n^2-9)+16$
$=16n^4-40n^2+25$ [**6 поена**] $=(4n^2-5)^2$ за $n\geq2$ [**6 поена**].

5. Како је $ACBD$ ромб, дакле паралелограм, то је $\measuredangle ECB=\measuredangle CAD=75^\circ$ (слика) [**6 поена**]. $\triangle BCE$ је једнакокраки троугао, па је $\measuredangle BEA=$ $\measuredangle BEC=\measuredangle ECB=75^\circ$. Слично је $\measuredangle BFA=75^\circ$ [7 **поена**]. Према томе је $\measuredangle EBF=360^\circ-3\cdot75^\circ=$ 135° [**7 поена**]. [Признати и ако се одреди конкаван $\measuredangle EBF=225^\circ$.]



Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа

02.03.2019.

VIII разред

1. Реши једначину $\sqrt{x^2-3x+\frac{9}{4}}=1+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

2. Докажи да је број
$$S=1+7+7^2+7^3+\ldots+7^{2018}$$
дељив са 19.

3. Површина омотача правилне шестостране призме је $648\mathrm{cm}^2$, а дијагонала бочне стране је 15cm. Израчунај површину призме.

4. Докажи да је производ четири узастопна непарна природна броја увећан за 16 једнак квадрату природног броја.

5. Кружнице k_1 и k_2 једнаких полупречника, са центрима A и B, редом, секу се у тачкама C и D. Полуправе AC и AD секу кружницу k_2 још у тачкама E и F. Ако је $\measuredangle CAD=75^\circ$, одреди $\measuredangle EBF$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.