Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
23.03.2019.

VI разред

1. Производ четири узастопна цела броја је петоцифрени број $\overline{9302*}$. Одреди те бројеве.

2. Дати су рационални бројеви $\frac{1}{2}, x, y, \frac{1909}{2018}$, који су поређани од најмањег до највећег. Одреди њихову аритметичку средину ако су разлике свака два суседна броја (већи минус мањи) једнаке.

3. Конструиши троугао ABC ако је полупречник описане кружнице $R = 5$ cm, страница $AB = 7$ cm и висина h_c из темена C је једнака 4 cm.

4. У правоуглом троуглу ABC ($\measuredangle C$ је прав) важи $BC < CA$. Нека су D, E и F тачке на хипотенузи AB такве да је CD висина, CE симетрала правог угла, а CF тежишна дуж. Ако је један од углова $\measuredangle BCD$, $\measuredangle DCE$, $\measuredangle ECF$ и $\measuredangle FCA$ двапут већи од неког другог од њих, израчунај углове датог троугла.

5. Аца је написао на табли 60 бројева, не обавезно различитих. Бора је за свака два написана броја израчунао њихов производ. Показало се да је међу тим производима тачно 600 негативних бројева. Колико је нула могло бити међу бројевима које је написао Аца?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 53-2**) *Прво решење.* Како је $15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 < 80000$, $16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 = 93024$, $17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 > 100000$ решење у скупу природних бројева је је $16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 = 93024$ [**12 поена**]. Друго решење је $(-19) \cdot (-18) \cdot (-17) \cdot (-16)$ [**8 поена**].

Друго решење. Од четири узастопна цела броја, два су увек парна, а један од њих је дељив и са 4. Због тога је производ та четири броја дељив са 8, што је у овом случају могуће једино ако се дати број завршава цифром 4 (до истог закључка се долази ако се искористи да је тај производ дељив са 4 и са 3) [**6 поена**]. Због тога међу дата 4 броја не може бити ниједан дељив са 5 (иначе би се производ завршавао нулом), па, узимајући у обзир величину резултата, добијамо да је једина могућност у скупу природних бројева $16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 = 93024$ [**6 поена**]. Друго решење је $(-19) \cdot (-18) \cdot (-17) \cdot (-16)$ [**8 поена**].

2. *Прво решење.* Због наведених услова (једнакост разлика), аритметичка средина дата четири броја једнака је аритметичкој средини највећег и најмањег броја [**10 поена**], дакле

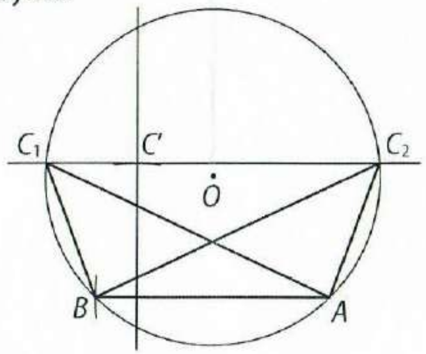
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1909}{2018}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1459}{2018}\ \textbf{[10 поена]}.$$

Друго решење. Означимо са d разлику која се помиње у тексту задатка. Тада је $d=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1909}{2018}-\frac{1}{2}\right)=\frac{150}{1009}$ [**10 поена**], затим $x=\frac{1}{2}+d$, $y=\frac{1}{2}+2d$, па је тражена аритметичка средина једнака

$$\frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{2}(1+3d)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{450}{1009}\right)=\frac{1459}{2018}\ \textbf{[10 поена]}.$$

(Може се рачунати и као $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+x+y+\frac{1909}{2018}\right)$, са истим резултатом.)

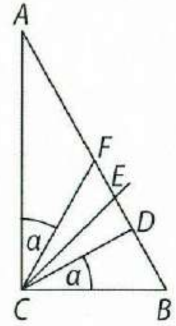
3. Конструише се најпре кружница датог полупречника и изабере на њој произвољна тачка A, а затим одреди на кружници тачка B за коју је $AB = 7$ cm [**5 поена**]. На произвољној нормали на праву AB одреди се тачка C' чије је растојање од праве AB једнако 4 cm (са исте стране те праве са које је центар кружнице), а затим конструише кроз добијену тачку права p паралелна са AB [**10 поена**]. Та паралела сече кружницу у двема тачкама, C_1 и C_2; троуглови ABC_1 и ABC_2 су тражени [**5 поена**]. Напомена: Признати и ако се као решење наведе само један од та два троугла.



4. Важи $\measuredangle BCD = \measuredangle FCA\ (=\alpha)$, $\measuredangle BCD + \measuredangle DCE = 45°$ и $\measuredangle DCE = \measuredangle ECF\ (= 45° - \alpha)$ [**8 поена**]. Могућа су два случаја:

(1) $\measuredangle BCD = 2\measuredangle DCE$, тј. $\measuredangle BCD = 30°$ и $\measuredangle DCE = 15°$; тада су углови троугла 30°, 60° и 90° [**6 поена**];

(2) $\measuredangle DCE = 2\measuredangle BCD$, тј. $\measuredangle BCD = 15°$ и $\measuredangle DCE = 30°$; углови троугла су тада 15°, 75° и 90° [**6 поена**].



5. Нека је међу бројевима које је Аца написао m бројева једног знака и n бројева другог. Тада је $m + n \leq 60$, а међу производима које је Бора израчунао има mn негативних, тј. $mn = 600$ [**5 поена**]. Треба одредити све начине на које се број 600 може представити као производ два броја чији збир није већи од 60; то су:

$$600 = 15 \cdot 40 = 20 \cdot 30 = 25 \cdot 24,$$

па међу бројевима које је Аца написао различитих од нуле може бити $55 = 15 + 40$, $50 = 20 + 30$ или $49 = 25 + 24$ [свако решење **по 4 поена**]. Број нула међу датим бројевима може бити 5, 10 или 11 [свако решење **по 1 поен**].