

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

09.05.2009.

VI РАЗРЕД

1. Одреди целе бројеве x , y и z такве да је $x < y < z$ и
 $x \cdot y \cdot z = 2009$.
2. Дате су 4 „плаве“ и 5 „црвених“ тачака, тако да нема три колинеарне тачке (од тих 9 тачака). Колико троуглова, чија сва темена нису исте боје, одређују ове тачке?
3. Ако Вера уложи у банку 25000 динара на годину дана добиће камату од $p\%$. На сав новац који уложи преко 25000 динара добија $(p+2)\%$ камате. Колико новца је Вера уложила у банку ако је укупна камата за годину дана била $(p+0,4)\%$?
4. Дат је оштроугли разностранични троугао ABC са ортоце-нтром H и центром описане кружнице O . Нека је D пресечна тачка праве BO и описане кружнице ($B \neq D$). Докажи да је четвороугао $AHCD$ паралелограм.
5. Број је леп ако је непаран и једнак збиру три узастопна цела броја. Докажи да:
а) збир два лепа броја није леп,
б) производ два лепа броја јесте леп број.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

09.05.2009.

VII РАЗРЕД

1. Ако $13 \mid (a^2 + b^2)$, докажи да $13 \mid (2a + 3b) \cdot (3a + 2b)$.
2. У круг полупречника 1 су уписани правоугаоник $ABCD$, са страницама $AB = a$ и $BC = b$, и једнакокраки троугао CDE са основицом CD . За које вредности странице b троугао CDE и правоугаоник $ABCD$ имају једнаке површине.
3. Одреди све природне бројеве x и y такве да је
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2009}.$$
4. Две наспрамне странице конвексног четвороугла леже на узајамно нормалним правама и њихове дужине су 8cm и 6cm. Одреди дужину дужи која спаја средишта дијагонала тог четвороугла.
5. Бранко је изабрао 4 броја. Воја је за свака два Бранкова броја израчунао разлику већег и мањег броја и добио бројеве:
2, 2, 3, 4, 5, 6.
Вера тврди да је Воја погрешно у рачуну. Да ли је Вера у праву?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 180 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

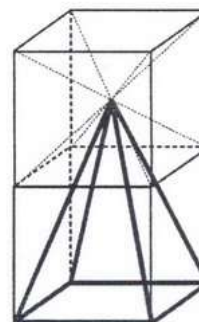
09.05.2009.

VIII РАЗРЕД

1. Одреди све вредности реалних бројева a , b , c и d за које је:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a \cdot (b + c + d).$$

2. Дате су две исте коцке. Једна је стављена на другу тако да формирају квадар. Направљена је пирамида чији је врх средиште горње коцке, а основа основа доње коцке (види слику). Одреди који део запремине пирамиде је у горњој коцки у односу на запремину читаве пирамиде.



3. Нека је $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Одреди све вредности за x за које важи:

$$\frac{x^{2009} + 1}{2} + \frac{2x^{2009} + 1}{3} + \dots + \frac{n \cdot x^{2009} + 1}{n+1} = n.$$

4. Странаца квадрата је дужине a . Нека је M средиште странеце BC , а X подножје нормале из темена A на дуж MD . Изрази обим троугла ABX у зависности од странеце a .

5. Докажи да је

$$\frac{1}{2009} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2007}{2008} < \sqrt{\frac{1}{2009}}.$$

— Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

— Израда задатака траје 180 минута.

— Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.