

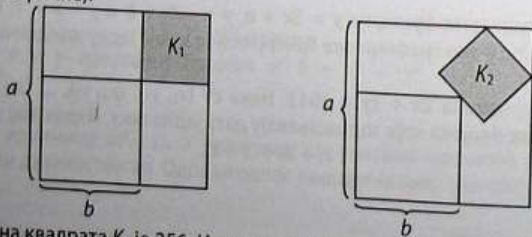
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ
11.05.2013. године

VI разред

- Бранко и Ратко трче трку. Ратко има за 15% дужи корак од Бранка, али зато за исто време направи 15% мање корака од Бранка. Ко ће пре стићи на циљ?
- Бане се јутрос сетио да има домаћи задатак из математике и урадио га је пре поласка у школу, између 7 и 8 сати. Када је почео да ради домаћи, казаљке на часовнику су биле једнако удаљена од цифре 6 и нису се поклапале. Када је завршио домаћи казаљке су се поклопиле. Колико времена је Бане радио домаћи?
- а) Докажи да симетрала унутрашњег угла код темена А троугла ABC пролази кроз тачку пресека симетрала спољашњих углова код темена В и С.
б) Конструирај троугао ако су дате тачке пресека симетрала спољашњих углова.
- Нађи најмањи природан број чији се збир цифара смањи за 2013 када се тај број повећа за 3.
- Све странице трапеца ABCD су различитих дужина. Дужине основица су 20cm и 10cm. Нека су M и N, редом, средишта основица AB и CD. Ако је дужина дужи MN једнака 5cm, докажи да се праве одређене страницама BC и AD секу на кружници чији је пречник основица AB.

VII РАЗРЕД

- Одреди цифре a, b и c тако да важи $(\overline{ab})^a = \overline{bcb}$.
- У квадрату су нацртана два квадрата као на сликама (обе слике су осносиметричне).



Површина квадрата K_2 је 256. Израчунај површину квадрата K_1 .

- Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је апсолутна вредност разлике свака два мања од 2. Докажи да је

$$a+b+c < \sqrt{ab+1} + \sqrt{bc+1} + \sqrt{ac+1}.$$

- Нека су k_1, k_2, k_3, k_4 четири кружнице једнаких полупречника које имају заједничку тачку O при чему се никоје две не додирују. Означимо са A, B, C, D редом пресечне тачке суседних кружница k_1 и k_2, k_2 и k_3, k_3 и k_4, k_4 и k_1 , различите од тачке O . Докажи да је четвороугао ABCD паралелограм.
- Уочено је 9 темена правилног 16-тоугла. Докажи да постоји једнако-кракоправоугли троугао са теменима у уоченим тачкама.

VIII РАЗРЕД

- Реши систем једначина:

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 4y - 17 = 0. \end{cases}$$

- Докажи да важи неједнакост

$$2013 < \frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + \dots + \frac{2013^2+1}{2013^2-1} < 2013 + \frac{1}{2}.$$

- Правилна тространа пирамида VABC пресечена је са равни која садржи средишта основних ивица AB и AC и паралелна је са бочном ивицом AV. Израчунај обим и површину пресека ако је дужина основне ивице 12cm, а дужина бочне ивице 14cm.
- Дат је правилан 2013-угао. На колико начина се могу изабрати три његова темена која су истовремено и темена једног једнакокраког троугла?
- Нека је O тачка на кружници $k(S, r)$. Кружница m са центром у тачки O сече кружницу k у тачкама P и Q . Нека је R тачка у унутрашњости кружнице k у којој се секу кружница m и кружница $s(Q, QO)$, а L друга тачка пресека праве PR и кружнице k . Докажи да је дуж LR једнака полупречнику кружнице k .