

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике
ученика основних школа

11.05.2019.

VI разред

1. Мерни бројеви дужина страница једнакокраког троугла дати су следећим једнакостима

$$a = 265 - 7x, \quad b = 81 + x \quad \text{и} \quad c = 115 + 3x,$$

где је x рационални број. Колики највише може бити обим тог троугла?

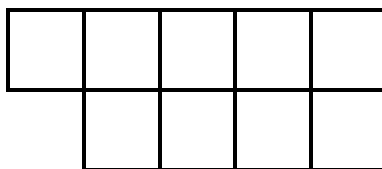
2. Нека су a, b, c, d природни бројеви такви да је
 $\text{НЗД}(a, b) = 24$, $\text{НЗД}(b, c) = 36$, $\text{НЗД}(c, d) = 54$, $70 < \text{НЗД}(d, a) < 100$.
Одреди $\text{НЗД}(d, a)$.

3. У троуглу ABC мерни бројеви дужина страница су три узастопна природна броја. Нека је P средиште странице BC и нека је симетрала угла BCA нормална на дуж AP . Одреди мерне бројеве дужина страница троугла ABC .

4. Сваки од бројева $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ једнак је 1 или -1 . Да ли је могуће да важи једнакост:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_9a_{10} + a_{10}a_1 = 0?$$

5. Из таблице 2×5 која је подељена на 10 квадрата уклоњен је квадрат у доњем левом углу (види слику). У преосталих 9 поља треба распоредити бројеве 1, 2, ..., 9 тако да је збир бројева у свакој вертикали (колони), почевши од друге, за један већи од збира бројева у претходној вертикали (колони). На колико начина је то могуће урадити?



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 180 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике
ученика основних школа

11.05.2019.

VII разред

1. Ако је $\sqrt{49-x^2} - \sqrt{25-x^2} = 3$, одреди вредност израза $\sqrt{49-x^2} + \sqrt{25-x^2}$.
2. Одреди све начине на које се број 2019 може представити као збир узастопних целих бројева (два или више).
3. У оштроуглом троуглу ABC , тачке D и E су подножја висина из C и A , тим редом, при чему важи $AD = BC$. Ако је F подножје нормале из тачке D на дуж AE , докажи да је полуправа BF симетрала угла ABC .
4. Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код темена C и углом BAC од 20° . На хипотенузи AB дате су тачке O и D , такве да је D средиште дужи OB , а круг са центром у O , полупречника OD , додирује страницу AC . Одреди величину угла BOD .
5. За природан број кажемо да је *добар* ако се при његовом разлагању на просте чиниоце, сваки прост чинилац појављује са непарним изложиоцем. (На пример, $17 = 17^1$, $35 = 5^1 \cdot 7^1$, $54 = 2^1 \cdot 3^3$ су добри бројеви.) Одреди највећи број n такав да постоји n узастопних природних бројева који су сви добри.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 180 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Државно такмичење из математике
ученика основних школа

11.05.2019.

VIII разред

1. Одреди природан број n за који је збир
 $1^{2016} + 2^{2017} + 3^{2018} + 4^{2019} + 5^{2020} + n$
дељив са 13, а вредност израза $|n - 2019|$ најмања могућа.

2. Ако је

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} + \dots + \frac{1}{1+x_{2019}} = 2019$$

и ниједан од бројева $x_1, x_2, \dots, x_{2019}$ не припада скупу $\{-1, 0\}$, одреди вредност израза

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{x_2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{x_3}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{1}{x_{2019}}}.$$

3. Нека је дата коцка $ABCD A'B'C'D'$ ивице 4cm и нека је M средиште ивице AB . Израчунај површину пресека равни $MC'D$ и дате коцке.
4. У кружницу k уписан је правоугли троугао ABC (угао код C је прав). Нека је тачка K средиште лука BC кружнице k који не садржи тачку A ; N средиште дужи AC и M друга тачка пресека праве KN и кружнице k . Тангенте на кружницу k , у тачкама A и C , секу се у тачки E . Докажи да је угао EMK прав.
5. На странама коцке написани су различити природни бројеви од 1 до 6 на произвољан начин. Затим је у сваком темену коцке написан збир три броја на странама коцке које се састају у том темену. Одреди највећу могућу вредност најмањег од тих осам збирова.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 180 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.