Министарство просвете и науке Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

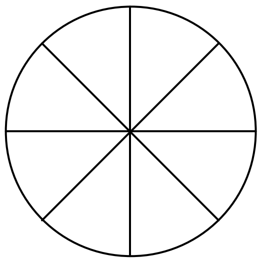
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
08.05.2011.

VI РАЗРЕД

1. Испред и иза броја 357 допиши цифре 3, 5 и 7, тако да нови шестоцифрени број буде дељив истовремено са 3, 5 и 7.

2. Спољашњи углови троугла су 20%, 35% и 45% збира спољашњих углова. Одреди угао између симетрале најмањег угла и најкраће странице.

3. Круг је подељен на осам исечака (види слику). У сваки исечак упиши различите троцифрене броје који се записује само цифрама 1 и 2, тако да се записи два броја у суседним исечцима (са заједничким полупречником) разликују само у једној цифри (разлика тих бројева је 1, 10 или 100).



4. Колико најмање сабирака може да буде са леве стране једнакости

$$BROJ + BROJ + ... + BROJ = AAAAAA,$$

а да она при томе буде тачна (различита слова представљају различите, а иста слова исте цифре)?

5. Конструиши четвороугао $ABCD$ ако је

$$AB = 5\text{cm},\ BC = 6\text{cm},\ CD = 7\text{cm},\ DA = 3\text{cm} \text{ и } \measuredangle BAC = \measuredangle DAC.$$

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете и науке Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

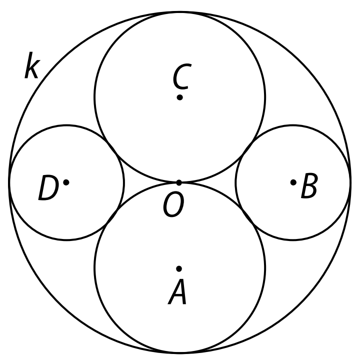
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
08.05.2011.

VII РАЗРЕД

1. На квадрату је уочено 9 тачака: 4 тачке су темена квадрата, 4 тачке су средишта страница и једна тачка је пресек дијагонала квадрата. Колико троуглова је одређено са ових 9 тачака?

2. Одреди целе бројеве x и y такве да је
$$x^2y = y^3 + 10.$$

3. У кружницу $k(O, 6\text{cm})$ уписане су две веће кружнице која се додирују у тачки O и додирују кружницу k и две мање кружнице које додирују две веће кружнице и кружницу k (види слику). Одреди површину четвороугла $ABCD$ чија су темена центри уписаних кружница.



4. У спољашњости једнакостраничног троугла ABC дата је тачка M, таква да је $\measuredangle CMA = 30°$ и $\measuredangle BMA = 45°$. Одреди величину угла ABM.

5. Да ли постоји природан број n такав да важи
$$(1020^n - 1) \mid (2010^n - 1)\ ?$$

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете и науке Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
08.05.2011.

VIII РАЗРЕД

1. За које x израз $x(x+2)(x+4)(x+6)$ има најмању вредност? Образложи одговор.

2. Пресек коцке и равни је петоугао. Докажи да је површина тог петоугла мања од производа две његове најдуже странице.

3. Докажи да не постоје цели бројеви x, y и z такви да је

$$x^4 + y^4 = z^4 + 3.$$

4. Јанко је уочио скуп свих 2011-цифрених природних бројева који се записују помоћу две тројке, једне двојке, а остале цифре су јединице. Колико у том скупу има бројева који су дељиви са 99?

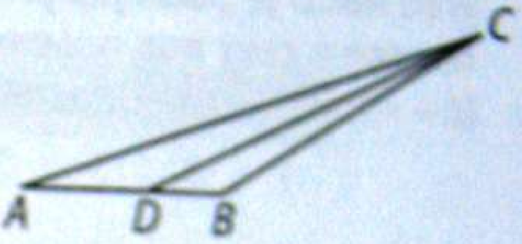
5. Дат је круг K_1. Тетиве AM и BN тог круга секу се у тачки P. Нека је O средина лука MN. Ако је $ON = OP = OM$, докажи да је P ортоцентар троугла ABO.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 180 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

1. Збир цифара броја који се добија када се броју 357 додају цифре 3, 5 и 7 је 30 па је увек дељив са 3. Како мора бити дељив и са 5, цифра 5 мора бити додата као последња. Дакле, могући бројеви су **37**3575, **73**3575, **3**357**7**5, **7**357**3**5, 357**37**5 и 357**73**5. Бројеви дељиви са 7 су 735735 и 357735, па су то и решења задатка.

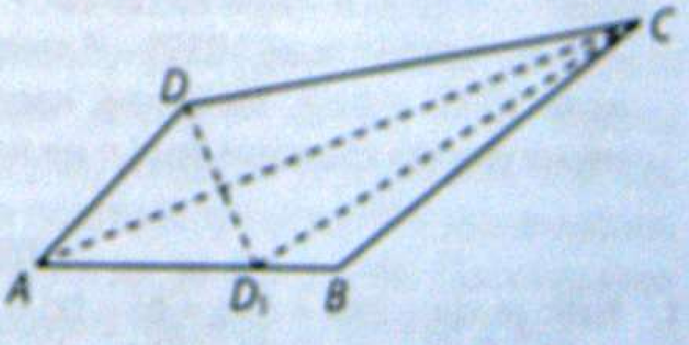
2. Спољашњи углови троугла су 72°, 126° и 162°, па су унутрашњи углови 108°, 54° и 18°. Нека је $\measuredangle ABC = 108°$ и $\measuredangle ACB = 18°$. Према томе, $\measuredangle DCB = 9°$, па је $\measuredangle CDB = 180° - (108° + 9°) = 63°$.



3. Тражени бројеви су 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221 и 222 па је једно решење дато на слици.

4. Најмање сабирака ће бити ако је $A = 1$. Број 111111 можемо записати као $1001 \cdot 111$, односно $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Највећи четвороцифрени број који можемо записати коришћењем нека четири од наведених пет чинилаца је $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37 = 8547$. Дакле, 13 је најмањи број четвороцифрених сабирака са различитим цифрама који у збиру дају број 111111.

5. Нека је D_1 симетрична тачка тачки D у односу на дијагоналу AC. Како је $\measuredangle BAC = \measuredangle DAC$ тачка D_1 се налази на страници AB. Одавде је $AD = AD_1$ и $D_1C = DC$. Можемо конструисати троугао D_1BC чије су странице дужине 2cm, 6cm и 7cm. Продужимо страницу BD_1 преко темена D_1 и нанесемо тачку A тако да је $BA = 5$cm. Сада можемо конструисати троугао ACD чије су нам све странице познате и добијамо и четврто теме четвороугла $ABCD$.

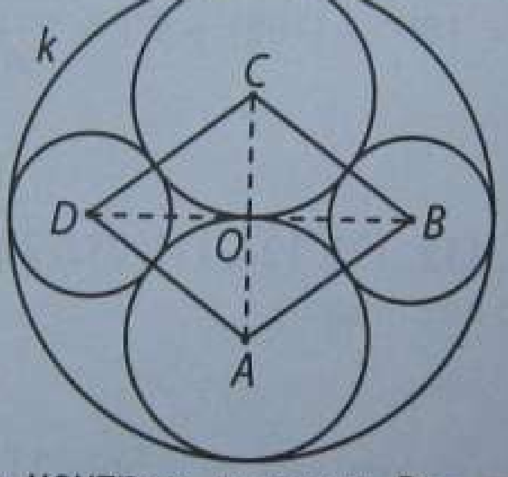


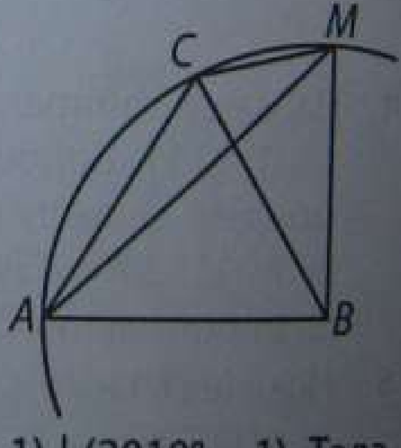
VII РАЗРЕД

1. Било које три тачке можемо изабрати на $9 \cdot 8 \cdot 7$ начина, а како три исте тачке можемо одабрати на 6 начина, укупан број различитих тројки тачака је 84. Међутим, како има 8 тројки колинеарних тачака, то дате тачке формирају 76 различитих троуглова.

2. Из поставке задатка имамо да је $x^2 = y^2 + \frac{10}{y}$. Како је x цео број, то и $\frac{10}{y}$ мора бити цео број. Следи да је $y \in \{1, -1, 2, -2, 5, -5\}$. Провером добијамо да су решења: $(x, y) \in \{(3, 2), (-3, 2)\}$.

3. Непосредно следи да су две веће кружнице подударне, а због симетрије у односу на праву AC, подударне су и две мање кружнице. Нека је $r = 3$cm полупречник веће кружнице, а r_1 полупречник мање кружнице. Четвороугао $ABCD$ је ромб јер је $AB = BC = CD = DA = r + r_1$. Како се дијагонале ромба полове и секу под правим углом, троугао OBC је правоугли и важи да је: $3^2 + (6 - r_1)^2 = (3 + r_1)^2$. Одавде је $r_1 = 2$cm. Површина четвороугла $ABCD$ је 24cm^2.





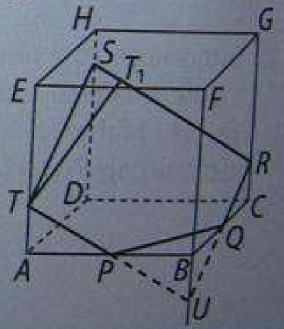
4. Нека је k кружница са центром у тачки B и полупречником AB. Тачка M припада овој кружници јер је угао ABC два пута већи од угла CMA (централни и периферијски угао). Према томе, троугао ABM је једнакокраки па је угао MAB једнак 45°. Дакле, угао ABM једнак је 90°.

5. Претпоставимо да тражени број n постоји и да $(1020^n - 1) \mid (2010^n - 1)$. Тада $1020^n - 1$ дели и разлику $(2010^n - 1) - (1020^n - 1) = 2010^n - 1020^n = 2^n \cdot (1005^n - 510^n)$. Како је број $1020^n - 1$ непаран и дели $2^n \cdot (1005^n - 510^n)$, то $1020^n - 1$ дели $1005^n - 510^n$. Међутим, како је $1020^n - 1 > 1005^n > 1005^n - 510^n$, то је немогуће, па тражени број n не постоји.

VIII РАЗРЕД

1. Како је $x(x+2)(x+4)(x+6) = (x^2+6x)(x^2+6x+8) = (x^2+6x)^2 + 8 \cdot (x^2+6x) + 16 - 16 = (x^2+6x+4)^2 - 16$, то је најмања вредност израза -16 и достиже се када је $x^2 + 6x + 9 - 5 = 0$, односно за $(x+3)^2 = 5$, то јест за

$$x = -3 - \sqrt{5} \text{ или } x = -3 + \sqrt{5}.$$



2. Раван α сече пет од шест страна коцке $ABCDEFGH$. Дакле, сече два пара паралелних страна, па петоугао има два пара паралелних страница. Пресек је петоугао $PQRST$ који је део паралелограма $URST$. Јасно је да је површина петоугла мања од површине паралелограма, односно ако са TT_1 обележимо висину паралелограма која одговара страницама SR и TU важи следеће:

$$P_{PQRST} < P_{URST} = RS \cdot TT_1 \le RS \cdot ST,$$

што је и требалао доказати.

3. Четврти степен ма ког целог броја може се завршавати само цифрама 0, 1, 5 и 6. Збир два четврта степен може се завршавати само цифрама 0, 1, 2, 5, 6 и 7, док се збир четвртог степена неког броја и броја 3 може завршавати само цифрама 3, 4, 8 и 9.

$+_{10}$	0	1	5	6
0	0	1	5	6
1	1	2	6	7
5	5	6	0	1
6	6	7	1	2

$+_{10}$	0	1	5	6
3	3	4	8	9

Дакле, не постоје цели бројеви x, y и z за које важи дата једнакост јер ће цифре јединица леве и десне стране једнакости бити увек различите.

4. Збир цифара свих таквих бројева је 2016, а како је 2016 дељиво са 9 и сви ти бројеви су дељиви са 9. Да би неки од тих бројева били дељиви са 11, разлика збира цифара на парним и непарним местима мора бити дељива са 11. Због избора цифара које се употребљавају за запис броја, разлика збира цифара на парним и непарним местима једино може бити 0. Како има 1006 непарних места, 1005 парних и збир цифара на овим местима мора бити 1008, то једна тројка може бити на неком непарном месту, а једна тројка и једна двојка на неким парним местима. Тројка на непарним местима може да се запише на 1006 начина, а двојка и тројка на парним местима на $1005 \cdot 1004$ начина. Дакле, у том скупу је $1006 \cdot 1005 \cdot 1004$ бројева дељивих са 99.

5. Обележимо са K_2 круг са центром у O и полупречником OP. Из једнакости периферијских углова у кругу K_1 следи $\measuredangle AMN = \measuredangle AON$, а из односа централног и периферијском угла у кругу K_2, следи да је $2 \cdot \measuredangle PMN = \measuredangle PON$. Дакле, права AO је симетрала угла PON, а пошто је троугао PON једнакокрак, следи да је $AO \perp PN$. Слично закључујемо да је $BO \perp PM$. Посматрајмо троугао АОВ. Тачка Р је ортоцентар тог троугла јер је $AP \perp BO$ и $BP \perp AO$.