Државно такмичење из математике ученика ОШ 2012.

ОШ „Јован Стерија Поповић“, Вршац

<u>Шести разред</u>

1. Производ шест узастопних целих бројева је седмоцифрен број $\overline{*6036**}$. Одреди те бројеве.

2. Дат је четвороугао $ABCD$ у коме је $AB = BC$, $\measuredangle ACB = 50°$, $\measuredangle ACD = 30°$ и $\measuredangle CBD = 20°$. Одреди $\measuredangle CAD$.

3. Дате су тачке C, B_1 и права p. Конструиши троугао ABC, ако је тачка C теме троугла, тачка B_1 средиште странице AC и ако је права p симетрала угла ABC.

4. Милашин је записао три броја. Златана је у тим бројевима заменила различите цифре различитим словима, а исте цифре истим словима и добила следећи запис ОХО, СЛОЖЕН, БРОЈ. Радашин тврди да је збир та три броја увек сложен број. Да ли је Радашин у праву?

5. Школа математике „Интеграл“ има два разреда. У првом разреду су 65% девојчице. У другом разреду су 45% девојчице. Укупно у оба разреда су 53% девојчице. Колико процената ученика школе је у првом разреду?

<u>Седми разред</u>

1. Бане је записао низ бројева 7, 14, 17, ... Сваки члан низа, почевши од другог, добија се тако што се претходни члан квадрира, саберу се цифре добијеног квадрата и на тај збир дода 1 (На пример, $7^2 = 49$, $4 + 9 = 13$, $13 + 1 = 14$, па је други члан низа 14). Који број се налази на 2012. месту овог низа?

2. Пред фудбалску утакмицу између Звезде и Партизана пет лица је дало следеће прогнозе:
   А: Неће бити нерешено;
   Б: Звезда ће примити бар један гол;
   В: Партизан ће победити;
   Г: Партизан неће изгубити;
   Д: На утакмици ће се постићи тачно три гола.
   По завршетку утакмице испоставило се да су три прогнозе биле тачне, а две нетачне. Којим резултатом је завршена утакмица?

3. Централни угао кружног исечка полупречника 12cm је 157° 30' (види слику). Израчунај површину четвороугла *OABC* са слике.

4. Ако су p и q прости бројеви већи од 3, онда је $p^4 - q^4$ дељиво са 48. Докажи.

5. Нека је у правоуглом троуглу ABC тачка D подножје висине из темена C правог угла и O_1, O_2 центри уписаних кружница троуглова ACD и BCD. Кружница са центром C и полупречником CD сече катете AC и BC у тачкама M и N, редом. Докажи:
   а) Тачке O_1, O_2, M и N су колинеарне.
   б) $MN > 2O_1O_2$.

Осми разред

1. Акцијама компаније за промет сулундара „Milashin & Radashin Ltd" из Петловца тргује се на Лондонској берзи. У току једног месеца, сваког радног дана у 12.00 часова вредност акција повећава се или се смањује за 17%. Да ли је могуће да је цена акција те компаније у два различита радна дана после 12.00 часова имала исту вредност?

2. Полупречник круга је r. Тетива CD тог круга сече пречник AB у тачки M под углом од 45°. Докажи да је $MC^2 + MD^2 = 2r^2$.

3. На дну језера постоји извор који сваког дана допуњава језеро константном количином воде. Крдо од 183 слона попије воду из језера за 1 дан, а крдо од 37 слонова за 5 дана. Колико дана би на језеру могао да пије један слон?

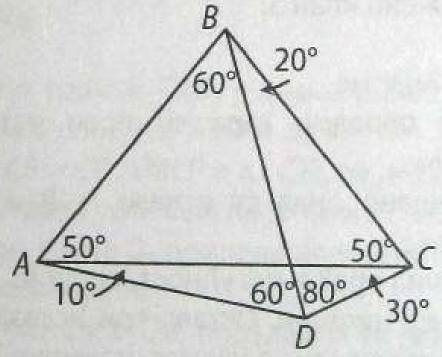
4. У правилну четворострану призму чија је основна ивица $a = 12\text{cm}$ и висина $H = 24\text{cm}$, уписана је правилна четворострана пирамида. Темена основе те пирамиде су на ивицама једне основе призме, а врх је у центру друге основе призме. Израчунај површину оне пирамиде која има најмању запремину.

5. Бројеви од 1 до 9 исписани су на 9 картица, на свакој по један. Два играча виде бројеве на свим картицама и наизменично узимају по једну картицу. Победник је онај који први објави да од изабраних карата, коришћењем операција +, −, ·, : и заграда, може саставити израз чија је вредност једнака 50. Није допуштено од карата састављати вишецифрене бројеве. Који играч има победничку стратегију, тј. може да осигура победу без обзира на начин игре његовог противника?

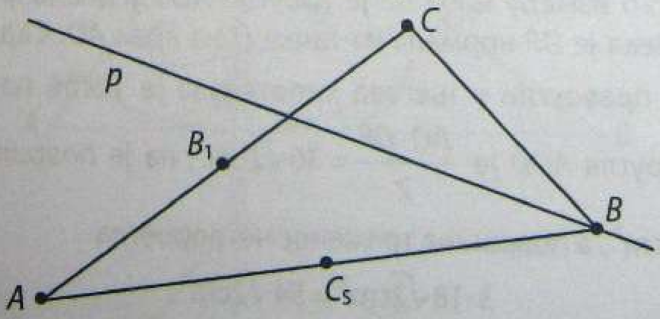
VI РАЗРЕД

1. Међу шест узастопних целих бројева сигурно је један дељив са 5, три су сигурно парна па је њихов производ дељив са 8, а како су два броја сигурно дељива са 3 производ ових бројева је сигурно дељив са 9. Из дељивости са 2 и 5 добијамо да је производ облика $\overline{*6036*0}$. Из дељивости са 8 имамо да је троцифрени завршетак дељив са 8 па производ може бити облика $\overline{*603600}$ или $\overline{*603640}$ или $\overline{*603680}$, а из дељивости са 9 да је производ један од бројева 3603600 или 8603640 или 4603680. Растављањем на чиниоце датих бројева имамо да је само 3603600 производ шест узастопних целих бројева, а они су 10, 11, 12, 13, 14, 15 или $-10, -11, -12, -13, -14, -15$.

2. У троуглу BCD је $\measuredangle BDC = 180° - (\measuredangle CBD + \measuredangle BCD) = 80°$, па је троугао BCD једнакокрак и $BC = BD$. Како је $AB = BC = BD$, то је и троугао ABD једнакокрак па је $\measuredangle BAD = \measuredangle BDA = 60°$ и $\measuredangle CAD = \measuredangle BAD - \measuredangle BAC = 10°$.



3. Како је B_1 средиште странице AC, теме A добијамо преношењем дужи CB_1 на праву CB_1 тако да је $CB_1 = B_1A$ и $C - B_1 - A$. Како је права p симетрала угла ABC то се тачка C_S, осносиметрична слика тачке C у односу на праву p, налази на страници AB. Конструкоцијом ове тачке добијамо праву AC_S. У пресеку ове праве са правом p добијамо треће теме троугла B.



4. У запису ова три број јавља се свих 10 цифара. Девет цифара се јавља тачно једанпут, а једна се јавља четири пута. Збир свих ових цифара је $(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 3 \cdot O = 45 + 3 \cdot O = 3 \cdot (15 + O)$. Како је овај збир сигурно дељив са 3 и збир цифара збира три дата броја је увек дељив са 3, па је и сам збир дељив са 3 па је увек сложен број. Дакле, Радашин је у праву.

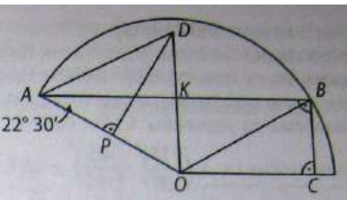
5. Означимо број ученика првог разреда са p, а број ученика другог разреда са d. У првом разреду је $65\%p$ девојчица, а у другом разред $45\%d$. Како је укупан број девојчица у оба разреда $53\% \cdot (p + d)$, то је $65\%p + 45\%d = 53\% \cdot (p + d)$. Сређивањем ове једнакости добијамо да је $3p = 2d$, а додавањем и левој и десној страни по $2p$ имамо $5p = 2 \cdot (p + d)$, односно $p = \frac{2}{5} \cdot (p + d) = 40\% \cdot (p + d)$. Дакле, у првом разреду је 40% од укупног броја ученика.

VII РАЗРЕД

1. Првих 10 чланова низа су: 7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, 8, 11. Ако склонимо прва четири члана низа имамо да је потребно одредити 2008. члан низа у коме се три броја 5, 8 и 11 узастопно понављају. Како је $2008 = 3 \cdot 669 + 1$, закључујемо да је тражени члан 5.

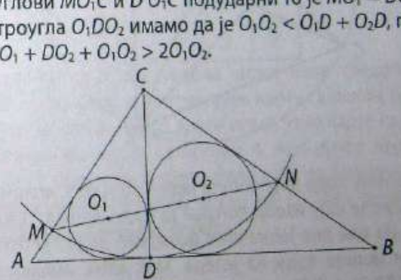
2. Размотримо три могућности:
а) Ако је Партизан победио тада су прва четири исказа тачна, па претпоставка није тачна.
б) Ако је било нерешено онда су искази А, В и Д нетачни, па ни ова претпоставка није тачна.
Закључујемо да је тачна трећа могућност, тј. да је Звезда победила. У том случају искази В и Г су нетачни. Остала три исказа морају бити тачна. Из тачности исказа Б и Д следи да је резултат утакмице 2 : 1 за Звезду.

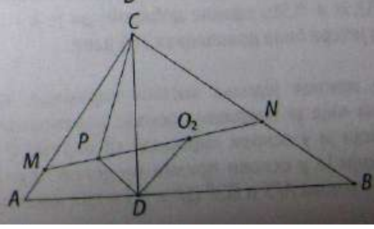
3. Нека је D тачка осносиметрична тачки O у односу на праву AB и нека је пресек дужи OD и AB тачка K. Троуглови AOK, BOK и OBC су подударни (све три једнаке странице) па је тражена површина једнака трострукој површини троугла AOK. Троуглови AOK и ADK су подударни (две једнаке странице и угао између њих) па је троугао AOD једнакокрак са углом при врху од 45°. Нека је DP нормала из тачке D на крак AO. Сада је троугао APD једнакокрако правоугли и његова хипотенуза је 12cm, па је $DP = 6\sqrt{2}\text{cm}$.
Површина троугла AOD је $\dfrac{AO \cdot DP}{2} = 36\sqrt{2}\text{cm}^2$, па је површина троугла AOK једнака $18\sqrt{2}\text{cm}^2$, а површина траженог четвороугла
$$3 \cdot 18\sqrt{2}\text{cm}^2 = 54\sqrt{2}\text{cm}^2.$$



4. $p^4 - q^4 = (p^2 + q^2)(p^2 - q^2)$. Број $p^2 + q^2$ је сигурно дељив са 2 јер је збир два непарна броја. Покажимо да је $p^2 - q^2$ дељиво са 24. $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1) = (p - 1)(p + 1) - (q - 1)(q + 1)$. Како бројеви p и q нису дељиви са 3 (прости су!) онда је сигурно њихов претходник или следбеник дељив са 3, па је и $(p - 1)(p + 1)$ и $(q - 1)(q + 1)$ дељиво са 3, а одатле и њихова разлика. Како су p и q прости бројеви облика су $p = 2a + 1$, $q = 2b + 1$. Тада је $p^2 - q^2 = (4a^2 + 4a + 1) - (4b^2 + 4b + 1) = 4(a(a + 1) - b(b - 1))$. $a(a + 1)$ и $b(b - 1)$ су производи два узастопна броја, парни су, па је и њихова разлика дељива са 2, а самим тим је и $4(a(a + 1) - b(b - 1))$ дељиво са 8, па је $p^2 - q^2$ дељиво са 24, одакле следи тврђење задатка.

5. а) Како је $CM = CN$ то је троугао CMN једнакокрако правоугли и $\measuredangle CMN = 45°$. Нека је P пресек симетрале угла ACD и дужи MN. Троуглови MPC и DPC су подударни ($CM = CD$, $CP = CP$, $\measuredangle MCP = \measuredangle DCP$), па је $\measuredangle CMP = \measuredangle CDP = 45°$. Дакле, полуправа DP је симетрала угла CDA па је тачка P центар уписане кружнице, односно $P \equiv O_1$. Дакле, тачка O_1 припада правој MN. Аналогно се показује и да тачка O_2, припада правој MN.
б) Како су троуглови MO_1C и $D\,O_1C$ подударни то је $MO_1 = DO_1$. Аналогно је и $NO_2 = DO_2$. Из троугла O_1DO_2 имамо да је $O_1O_2 < O_1D + O_2D$, па је $MN = MO_1 + O_1O_2 + O_2N = DO_1 + DO_2 + O_1O_2 > 2O_1O_2$.

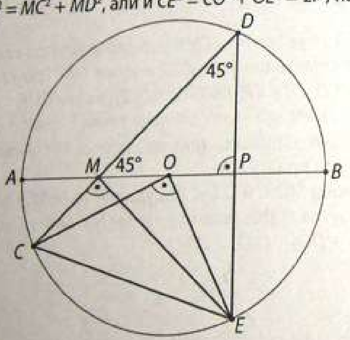




VIII РАЗРЕД

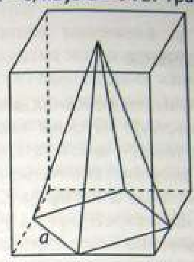
1. Означимо вредност акција на берзи једног дана била x. После извесног броја дана вредност акција ће бити $1{,}17^k \cdot 0{,}83^p \cdot x$ где је са k означен број дана када се цена акција повећавала, а са p број дана када се цена акција смањивала. Доказаћемо да једначина $1{,}17^k \cdot 0{,}83^p \cdot x = x$ нема решења. Једначина је еквивалентна са $x \cdot \left(\frac{117}{100}\right)^k \cdot \left(\frac{83}{100}\right)^p = x$. Наиме, у том случају бисмо имали да је $117^k \cdot 83^p$ једнако 100^{k+p} где су k и p ненегативни цели бројеви. Међутим то је немогуће јер је на левој страни непаран број, а на десној страни паран број. Дакле, цена акција у два различита радна дана после 12.00 часова не може бити иста.

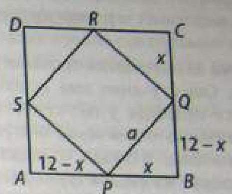
2. Нека је тачка E осносиметрична слика тачке D у односу на пречник AB. Како су троуглови MDP и MEP подударни то је троугао DME једнакокрако правоугли и $\measuredangle DME = 90°$, $MD = ME$ и $\measuredangle MDE = 45°$. Сада је и $\measuredangle CME = 90°$ и $\measuredangle COE = 90°$ (централни угао над тетивом чији је периферијски угао 45°). Важи да је $CE^2 = MC^2 + ME^2 = MC^2 + MD^2$, али и $CE^2 = CO^2 + OE^2 = 2r^2$, па је $MC^2 + MD^2 = 2r^2$.



3. Означимо количину воде коју попије један слон са s, количину воде у језеру са j и количину воде коју извор допуни за један дан са i. Сада је $i + j = 183s$ и $5i + j = 37 \cdot 5s$. Из ове две једначине добијамо да је $i = 0{,}5s$, па је $j = 182{,}5s$. Ако један слон попије воду из језера за k дана имамо да је $ks = j + ki$, односно $ks = 182{,}5s + 0{,}5ks$, одакле добијамо да је $k = 365$. Дакле, једном слуну би вода из језера била довољно за 365 дана.

4. Како је висина призме једнака висини пирамиде, пирамида најмање запремине је она чија је површина основе најмања. Означимо страницу квадрата $PQRS$ који је у основи пирамиде са a. Теме P дели страницу AB квадрата $ABCD$ који је у основи призме на делове дужина x и $12 - x$. Из подударности троуглова APS и BQP ($SP = PQ$ и два налегла угла на страницу SP једнака са одговарајућим угловима налеглим на страницу PQ) следи да је $BQ = 12 - x$. Сада је $a^2 = x^2 + (12 - x)^2 = 2x^2 - 24x + 144 = 2(x - 6)^2 + 72$. Страница a ће имати најмању вредност када $(x - 6)^2$ има најмању вредност, а то је за $x = 6$, па је $a = 6\sqrt{2}$. Тражена површина је $72 \cdot (1 + \sqrt{33})\text{cm}^2$.





5. Победу може да осигура први играч у три извлачења (у два извлачења није могуће остварити победу јер нема два броја која могу дати резултат 50 било којом датом операцијом). Приметимо да се број 50 може добити на следеће начине:

$$6 \cdot 8 + 2; \quad 8 \cdot 7 - 6; \quad (6 + 4) \cdot 5; \quad 6 \cdot 9 - 4$$

и да се број 6 јавља у свим изразима, бројеви 8 и 4 у два и бројеви 2, 7, 5 и 9 у по једном.

6			
4		8	
5	9	2	7

Победничка стратегија првог играча може бити следећа: Прво извлачи карту са бројем 6. Ако је други играч узео карту са неким од бројева 4, 5 или 9 узима карту са бројем 8. Ако је други играч узео карту са неким од бројева 2, 7 или 8 први узима карту са бројем 4. Ако други играч узме карту са бројевима 1 или 3, први може узети било који од бројева 4 или 8. У трећем извлачењу узима карту са којом може да састави један од дата четири израза и на тај начин осигурава победу.