а) Која је прва следећа срећна година?
б) Колико има срећних година у трећем миленијуму?

3. Израчунај запремину правилне осмостране призме чији је највећи дијагонални пресек квадрат странице 12 cm.

4. Одреди све вредности целог броја m за које је број $\dfrac{m^2+2016}{|m|+2}$ такође цео.

5. Одреди све просте бројеве p и q за које је број p^2+q^2+1 потпун квадрат.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ
29.08.2020. године

VI разред

1. Отац има три сина којима даје џепарац. Најстарији син добија трећину укупног износа за џепарац и још 30 динара, средњи трећину остатка и још 30 динара, а најмлађи добија преосталих 430 динара. Колико добијају најстарији и средњи син?

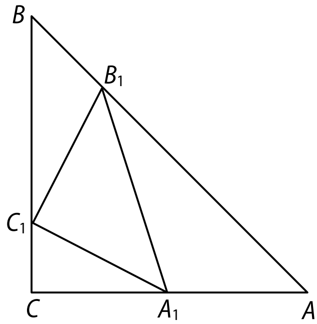
2. У две истоветне кутије налази се укупно 61 куглица. Све куглице обојене су једном од пет различитих боја и нису све исте масе. Постоје куглице две различите масе – лакше и теже. Докажи да постоје бар 4 куглице исте боје и масе у истој кутији.

3. Нека су бројеви $a_1, a_2, ..., a_n$ сви позитивни и међу собом различити делиоци броја 2020. Израчунај количник збира тих бројева и збира њихових реципрочних вредности:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}}.$$

4. На страници AB троугла ABC, који није правоугли, дате су тачке M, N, P и Q, тим редом од A према B, такве да праве CM, CN, CP и CQ деле угао ACB на пет једнаких делова. Ако су унутрашњи углови троугла CMN једнаки унутрашњим угловима троугла ABC, одреди углове троугла ABC.

5. Троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ су једнакокрако-правоугли са хипотенузама AB, односно A_1B_1, при чему тачка A_1 припада дужи AC , тачка B_1 припада дужи AB и тачка C_1 припада дужи BC. Докажи да је $AA_1 = 2CC_1$.



VII разред

1. У правоугаонику *ABCD* тачка *M* је средиште дужи *AB*, а тачка *E* пресек дијагонале *AC* и дужи *DM*. Ако је $AB = \sqrt{2}$ cm и *BC* = 1 cm, докажи да је угао *CED* прав.

2. Разломак $\dfrac{100^n + 10^n}{100^n + 4 \cdot 10^n}$, $n \in \mathbb{N}$ сведи на облик $\dfrac{p}{q}$, где су *p* и *q* узајамно прости бројеви.

3. На свакој страни коцке написан је један природан број. Затим је у сваком темену коцке написан производ три броја написана на странама којима је то теме заједничко. Збир осам добијених производа је 175. Одреди збир бројева на странама коцке.

4. Ако је $\dfrac{1}{a+2019} + \dfrac{1}{b+2019} + \dfrac{1}{c+2019} = \dfrac{3}{2020}$, израчунај вредност израза

$$\frac{a}{a+2019} + \frac{b}{b+2019} + \frac{c}{c+2019}.$$

5. Свака од 13 правих, од којих ниједна није паралелна неком пару страница квадрата, дели квадрат на два четвороугла чије се површине односе као 3 : 5. Докажи да се неке четири од ових 13 правих секу у једној тачки.

VIII разред

1. Одреди последње две цифре броја 7^{7^7}.

2. Нека су x, y, z и $\dfrac{y + x\sqrt{2}}{z + y\sqrt{2}}$ природни бројеви. Одреди најмању могућу вредност количника $\dfrac{x+z}{y}$.

3. Дата је тространа пирамида $ABCD$ чије су дужине ивица $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $BD = 4$ cm, $AD = 3$ cm, $CD = \frac{12}{5}\sqrt{2}$ cm. Раван, која садржи праву AB и нормална је на CD, сече дуж CD у тачки M. Раван, која садржи праву CD и нормална је на AB, сече дуж AB у тачки N. Израчунај дужину дужи MN.

4. Нека је ABC троугао са тупим углом у темену A и D подножје висине троугла из темена A. Кружница k са центром D, која садржи тачку A, сече праве AB и AC, редом у тачкама M и N. Докажи да је $AB \cdot AM = AC \cdot AN$.

5. Одреди све природне бројеве n за које је могуће неке од бројева из скупа $\{1, 2, 3, ..., n\}$ повећати за 1, а све остале смањити за 1, тако да њихов производ остане непромењен.

3. Висина призме и најдужа дијагонала основе су 12 cm. Правилни осмоугао се састоји од четири подударна делтоида чије су дијаголане 6 cm и $6\sqrt{2}$ cm, па је површина основе $B = 72\sqrt{2}$ cm², а запремина призме је $V = 864\sqrt{2}$ cm³.

4. $\dfrac{m^2+2016}{|m|+2}=\dfrac{m^2-4+2020}{|m|+2}=|m|-2+\dfrac{2020}{|m|+2}$. Полазни број је цео ако $(|m|+2)\,|\,2020$. Како је $2020 = 1 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, његови делиоци су 1, 2, 4, 5, 10, 20, 101, 202, 404, 505, 1010 и 2020 (има их 12). $|m|+2$ не може бити једнако 1. Ако је $|m|+2=2$ мора бити $m = 0$, а у свим осталим случајевима постоје по две могућности за m. Дакле, оваквих бројева m има 21 и они су: 0, 2, −2, 3, −3, 8, −8, 18, −18, 99, −99, 200, −200, 402, −402, 503, −503, 1008, −1008, 2018, −2018.

5. Нека је најпре $p = 2$. Тада треба да важи $5 + q^2 = n^2$, тј. $n^2 - q^2 = (n - q)(n + q) = 5$, одакле је $n + q = 5$ и $n - q = 1$, тј. $q = 2$ ($n = 3$). Претпоставимо сада да важи $p > 2$ и $q > 2$. За квадрат непарног броја важи $(2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1$, па је остатак при дељењу са 4 непарног броја једнак 1. У релацији $p^2 + q^2 + 1 = n^2$ сви бројеви p, q, 1 и n су непарни, па је остатак при дељењу са 4 леве стране једнакости 3, а десне 1, што је немогуће. Дакле, једино решење задатка је $p = q = 2$.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ

VI разред

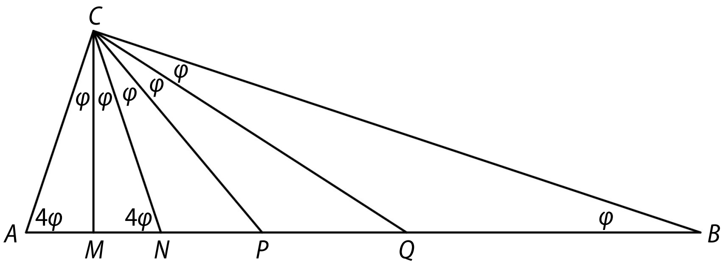
1. Нека је S укупна сума коју три сина добијају за џепарац. Тада, први син добија $x=\dfrac{1}{3}S+30$ динара, средњи син добија $y=\dfrac{1}{3}(S-x)+30=\dfrac{2}{9}S+20$ динара, а најмлађи син добија $z = 430$ динара. Из $x + y + z = S$, следи да је $\dfrac{4}{9}S=480$, односно $S = 1080$ динара, па најстарији син добија 390 динара, а средњи 260 динара.

2. По Дирихлеовом принципу у једној од кутија је бар 31 куглица. Како су оне обојене са 5 различитих боја, међу њима је бар 7 куглица исте боје. Како се појављују у две различите масе, међу тих 7 постоје бар 4 куглице које су и исте масе.

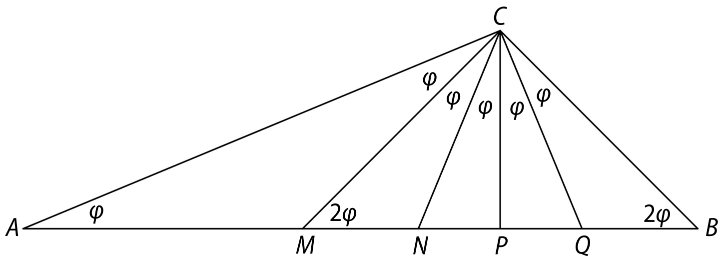
3. Ако је a_i делилац броја 2020, онда је $a_i=\dfrac{2020}{a_p}$ где је a_p такође делилац броја 2020. Сваки од бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можемо заменити тачно једним од разломака $\dfrac{2020}{a_1}, \dfrac{2020}{a_2}, \ldots, \dfrac{2020}{a_n}$, па важи:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=\frac{\frac{2020}{a_1}+\frac{2020}{a_2}+\ldots+\frac{2020}{a_n}}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=\frac{2020\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=2020.$$

4. 1°) Нека да је $\measuredangle ABC=\measuredangle MCN=\varphi$. Тада је $\measuredangle MNC$ (спољашњи угао троугла NBC) $=\measuredangle BAC=4\varphi$. Одавде је $10\varphi=180°$, тј. $\varphi=18°$, одакле је $\measuredangle ACB=5\varphi=90°$, што је супротно претпоставци да троугао ABC није правоугли. Дакле, у овом случају нема решења.



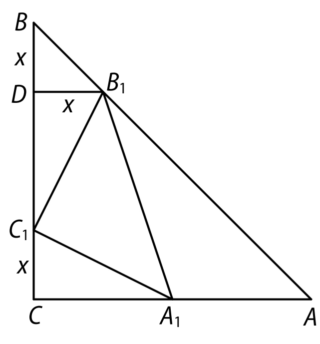
2°) Нека да је $\measuredangle BAC=\measuredangle MCN=\varphi$. Тада је $\measuredangle CMN$ (спољашњи угао троугла ACM) $=\measuredangle ABC=2\varphi$. Одавде је $8\varphi=180°$, тј. $\varphi=22°\ 30'$, одакле је $\measuredangle ACB=5\varphi=112°\ 30'$, $\measuredangle CAB=\varphi=22°\ 30'$, $\measuredangle CBA=2\varphi=45°$.



5. Нека је D подножје нормале из тачке B_1 на BC и нека је $CC_1=x$. Троуглови CA_1C_1 и DC_1B_1 су подударни правоугли троуглови (УСУ), па је $DB_1=CC_1=x$ и $CA_1=DC_1$. Како је троугао DB_1B једнакокрако-правоугли, то је $DB=DB_1=x$. Сада имамо:

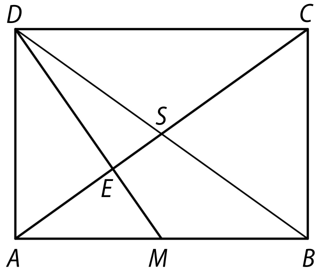
$AA_1=AC-CA_1=BC-DC_1=DB+CC_1=2x$.

Дакле, закључујемо да је $AA_1=2CC_1$.



VII разред

1. Применом Питагорине теореме имамо да је $AC=\sqrt{3}$ cm, $DM=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ cm. Ако са S означимо пресек дијагонала, тада су DM и AS тежишне дужи троугла ABD, па важи да је $DE=\dfrac{2}{3}DM=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ cm, $AE=\dfrac{2}{3}AS=\dfrac{1}{3}AC=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cm. Како важи да је $AD^2 = AE^2 + ED^2$, закључујемо да је $\measuredangle AED = \measuredangle CED = 90°$.



2. $\dfrac{100^n+10^n}{100^n+4\cdot 10^n}=\dfrac{10^n\cdot(10^n+1)}{10^n\cdot(10^n+4)}=\dfrac{10^n+1}{10^n+4}$. Ако $d \mid 10^n + 1$ и $d \mid 10^n + 4$, тада важи да $d \mid 10^n + 4 - (10^n + 1)$, тј. $d \mid 3$, па је $d = 1$ или $d = 3$. Бројеви $10^n + 1$ и $10^n + 4$ никада нису дељиви са 3 (збир цифара им је 2 и 5), па је $p = 10^n + 1$ и $q = 10^n + 4$.

3. Нека су a, b, c, d, e, f бројеви написани на странама коцке, тако да су a и b бројеви на супротним странама, као и c и d, Тада су у теменима коцке написани бројеви ace, acf, ade, adf, bce, bcf, bde, bdf. Како је

$$ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf = (a + b)(c + d)(e + f) = 175,$$

и како је $175 = 5 \cdot 5 \cdot 7$ једини начин да се 175 напише у облику производа три броја већа од 1, следи да је

$$a + b + c + d + e + f = (a + b) + (c + d) + (e + f) = 5 + 5 + 7 = 17.$$

4. Важи да је:

$$\frac{a+2019}{a+2019}+\frac{b+2019}{b+2019}+\frac{c+2019}{c+2019}=3,$$

$$\frac{a}{a+2019}+\frac{b}{b+2019}+\frac{c}{c+2019}=3-\frac{2019}{a+2019}-\frac{2019}{b+2019}-\frac{2019}{c+2019},$$

$$\frac{a}{a+2019}+\frac{b}{b+2019}+\frac{c}{c+2019}=3-2019\cdot\left(\frac{1}{a+2019}+\frac{1}{b+2019}+\frac{1}{c+2019}\right),$$

$$\frac{a}{a+2019}+\frac{b}{b+2019}+\frac{c}{c+2019}=3-2019\cdot\frac{3}{2020},$$

$$\frac{a}{a+2019}+\frac{b}{b+2019}+\frac{c}{c+2019}=\frac{3\cdot(2020-2019)}{2020}=\frac{3}{2020}.$$

5. Свака од 13 датих правих дели квадрат на два трапеза. Сваки од та два трапеза има висину једнаку страници квадрата. Како се површине тих трапеза односе као 3 : 5, то се и дужине средњих линија односе као 3 : 5. Дакле, свака од 13 правих мора да пролази кроз неку од тачака које средњу линију квадрата деле у односу 3 : 5. Квадрат има 2 средње линије, па постоје 4 тачке које их деле у односу 3 : 5. Како је број правих 13, то на основу Дирихлеовог принципа бар четири од датих правих садрже исту тачку.

VIII разред

1. Како је $7^4 = 2\,401 \equiv 1 \pmod{100}$ и како је $7^7 \equiv (-1)^7 \pmod 4 \equiv 3 \pmod 4$, то је

$$7^{7^7} = 7^{4k+3} \equiv 7^3 \pmod{100} \equiv 43 \pmod{100}.$$

2. Из услова задатка следи да је $\dfrac{y+x\sqrt{2}}{z+y\sqrt{2}} = k,\ k \in \mathbb{N}$. Даље је $x\sqrt{2}+y = ky\sqrt{2}+kz$,

тј. $\sqrt{2}(x-ky) = zk-y$ одакле мора бити $x - ky = 0$ и $zk - y = 0$. Сада је $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z}$,

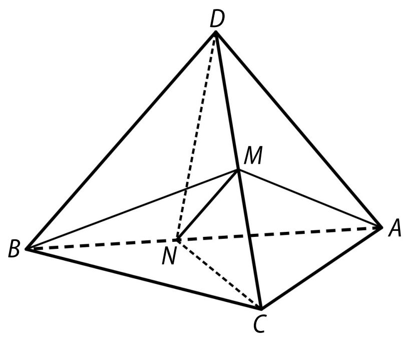
одакле је $y^2 = xz$, тј. $y = \sqrt{xz}$. Даље је

$$\frac{x+z}{y} = \frac{x}{\sqrt{xz}} + \frac{z}{\sqrt{xz}} = \sqrt{\frac{x}{z}} + \sqrt{\frac{z}{x}} \ge 2\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}} = 2.$$

Дакле, најмања вредност количника је 2 и достиже се за $x = y = z = 1$.

3. Троуглови *ABC* и *ABD* су правоугли (странице дужине 3cm, 4cm, 5cm) са хипотенузом *AB*. Троуглови *BCD* и *ACD* су једнакокраки са основицом *CD*. Раван која садржи праву *AB* и нормална је на *CD* сече ову дуж у њеном средишту (*AM* и *BM* су нормале једнакокраких троуглова из темена при врху). Тачка *N* је заједничко подножје висина из темена *C* и *D* на AB у троугловима *ABC* и *ABD*. Како су висине *CN* и *DN* једнаке (висине из темена правих углова подударних троуглова), *MN* је висина једнакокраког троугла *CDN*. Како је $CN = DN = \dfrac{12}{5}$ cm, то

је $MN = \sqrt{\left(\dfrac{12}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{12}{10}\sqrt{2}\right)^2}$ cm $= \dfrac{6}{5}\sqrt{2}$ cm.



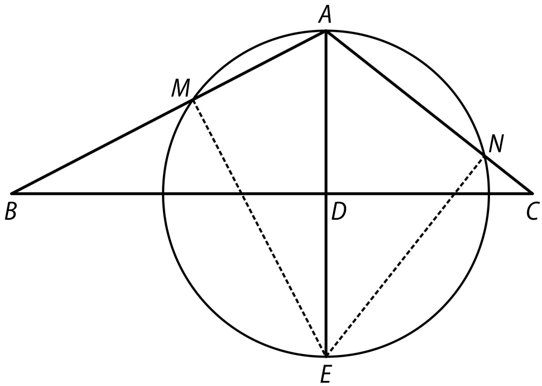
4. Нека је E друга тачка пресека праве AD са кружницом (AE је пречник кружнице). Правоугли троуглови ABD и AEM су слични (заједнички оштар угао у темену А), па је $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AM}$, тј.

$$AB \cdot AM = AD \cdot AE. \tag{1}$$

На исти начин, из сличности правоуглих троуглова ACD и AEN, добијамо да је

$$AC \cdot AN = AD \cdot AE. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи да је $AB \cdot AM = AC \cdot AN$.



5. Лако се види да је то могуће за све парне природне бројеве. Ако поделимо бројеве на парове узастопних природних бројева (1, 2), (3, 4), ... и мањи увећамо за 1, а већи умањимо за 1, производ се неће променити.

За $n = 3$ није могуће ни на који начин добити комбинацију бројева чији је производ 6.

Показаћемо да је ово могуће за сваки непаран број већи од 3.

За $n = 5$ бројеве 1, 2, 3, 4, 5 променићемо на следећи начин: 1+1, 2 – 1, 3 – 1, 4 + 1, 5 + 1, чиме добијамо бројеве 2, 1, 2, 5, 6 чији је производ такође 120.

За било који други непаран природан број, првих пет бројева променићемо као у случају $n = 5$, а преосталих $n - 5$ бројева поделићемо на парове узастопних природних бројева код којих ћемо мањи увећати за 1, а већи умањити за 1, чиме добијамо производ једнак производу првих n узастопних бројева.