

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа

10.02.2024.

III разред

1. Израчунај вредност израза:
 - а) $330 - 230 : 5 \cdot 4$;
 - б) $100 : 4 + 6 \cdot (20 - 8) : 2$.
2. На излет је из једне школе кренуло 78 дечака и 3 пута више девојчица. Распоређени су у 6 аутобуса. Колико је било ученика у једном аутобусу, ако је у сваком био једнак број ученика?
3. Наведи правило по коме су записани чланови низа: 92, 83, 74, 65, 56, ... Одреди збир оних чланова низа који припадају другој, трећој и петој десетици.
4. Нацртај праву m и на њој тачке A , B и C . Нацртај праву p која је паралелна са правом m и на њој тачке D и E .
 - а) Запиши све праве које одређују тачке A , B , C , D и E ?
 - б) Запиши све дужи које одређују тачке A , B , C , D и E ?
5. Робот Роле се креће само напред и назад правећи исте кораке. Једнога дана требало је да пређе 358 корака напред, од старта до циља. Кренуо је, али када му је остало сто корака до циља, морао је да се врати назад на старт, па поново да оде напред до циља. Колико укупно корака је Роле направио у овом кретању?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 120 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

III РАЗРЕД

**Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.**

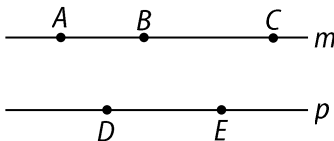
1. а) $330 - 230 : 5 \cdot 4 = 330 - 46 \cdot 4$ [3 бода] $= 330 - 184$ [3 бода] $= 146$ [4 бода].

б) $100 : 4 + 6 \cdot (20 - 8) : 2 = 100 : 4 + 6 \cdot 12$ [1 бод] $: 2 = 25$ [3 бода] $+ 72$ [3 бода] $: 2 = 25 + 36$ [2 бода] $= 61$ [1 бод].

2. Како дечака има 78, а девојчица 3 пута више, девојчица има $3 \cdot 78 = 234$ [6 бодова]. На излет је кренуло $78 + 234 = 312$ ученика [6 бодова]. Када се укупан број деце подједнако распореди у 6 аутобуса, у сваком аутобусу је по $312 : 6 = 52$ ученика [8 бодова].

3. (МЛ 56/3) Сваки следећи члан низа је за 9 мањи од претходног [4 бода]. Преостали чланови низа су: 47, 38, 29, 20, 11 и 2. Тражени бројеви друге десетице су 11 и 20 [по 3 бода за сваки тачно одређен број], треће десетице 29 [3 бода] и пете десетице 47 [3 бода]. Тражени збир је $11 + 20 + 29 + 47 = 107$ [4 бода].

4. (МЛ 57/3) Тачно нацртана слика **2 бода**.
а) m , p , $p_1(A, D)$, $p_2(A, E)$, $p_3(B, D)$, $p_4(B, E)$, $p_5(C, D)$, $p_6(C, E)$. Свака тачно записана права **по 1 бод**.
б) $AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE$. Свака тачно записана дуж **по 1 бод**.



5. На сто корака до циља, Роле је прешао $358 - 100 = 258$ корака [5 бодова]. Затим је морао да се врати исто 258 корака до старта [5 бодова]. Након тога је направио 358 корака од старта до циља [5 бодова]. Укупан број корака који је Роле направио је $258 + 258 + 358 = 874$ корака [5 бодова].

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа 10.02.2024.

IV разред

1. Израчунај вредност израза:

а) $2563 + 437 \cdot 6$; б) $19755 : 5 - 2637$; в) $145 \cdot 9 + 2028 : 26$.

2. Воја и Лаза су истовремено пешке кренули на пут од Ваљева до Котешице. Воја је у Котешицу стигао за 2 сата 22 минута и 33 секунде, а Лаза за 1 сат 50 минута и 2000 секунди. Ко је на циљ стигао пре, Воја или Лаза, и за колико?

3. Драгана има два пута мање сличица од Бојана, а Стефан има два пута мање сличица од Драгане. Колико сличица има свако од њих, ако укупно имају 714 сличица?

4. Које све бројеве можеш умањити највећим непарним бројем треће хиљаде тако да добијеш разлику која је мања од најмањег парног броја друге хиљаде? Постави и реши у облику неједначине у скупу \mathbb{N}_0 . Који је највећи, а који најмањи од тражених бројева?

5. Дати квадрат је подељен на 9 правоугаоника (види слику). Бројеви уписани у правоугаонике представљају њихове обиме. Израчунај дужину странице квадрата и његов обим.

		14
	28	
18		

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 120 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

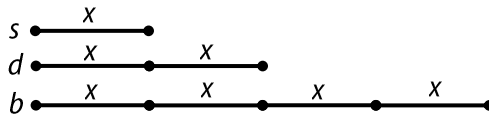
IV РАЗРЕД

**Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.**

1. (МЛ 56/5) а) $2563 + 437 \cdot 6 = 2563 + 2622$ [**4 бода**] $= 5185$ [**2 бода**];
б) $19755 : 5 - 2637 = 3951$ [**4 бода**] $- 2637 = 1314$ [**2 бода**];
в) $145 \cdot 9 + 2028 : 26 = 1305$ [**3 бода**] $+ 78$ [**4 бода**] $= 1383$ [**1 бода**].

2. (МЛ 57/2) Како је $2000 : 60 = 33$ (остатак 20), то је 2000 секунди = 33 минута 20 секунди [**6 бодова**]. Тада је 1 сат 50 минута и 2000 секунде једнако са 1 сат 83 минута и 20 секунди, а то је једнако 2 сата 23 минута и 20 секунди [**8 бодова**]. Дакле, Лаза је стигао за 2 сата 23 минута и 20 секунди, па је Воја стигао пре [**3 бода**] и то за 47 секунди [**3 бода**].

3. Стефан (s) има најмање сличица, па представимо методом дужи, преко његових сличица, број сличица Драгане (d) и Бојана (b).



Како укупно имају 714 сличица, постављеним условима одговара једначина $7 \cdot x = 714$ [**8 бодова**], чије је решење $x = 102$ [**3 бода**], па Стефан има 102 сличице [**3 бода**], Драгана 204 [**3 бода**] и Бојан 408 [**3 бода**].

4. Највећи непарни број треће хиљаде је 2999 [**2 бода**]. Најмањи паран број друге хиљаде је 1002 [**2 бода**]. Одговарајућа неједначина је $x - 2999 < 1002$ [**5 бодова**], чије је решење $2998 < x < 4001$ у скупу \mathbb{N}_0 , тј. $x \in \{2999, 3000, \dots, 3999, 4000\}$ [**7 бодова**]. Најмањи тражени број је 2999 [**2 бода**], а највећи 4000 [**2 бода**].

5. На датим сликама означене су странице правоугаоника, чији су обими познати, које су једнаке са неким деловима страница квадрата, као наспрамне странице правоугаоника [за сваки од 3 тачно рашчлањена правоугаоника **по 4 бода**].

//		14
	28	
//	18	/

	//	14
/	/	28
18	///	///

/		/ 14
	28	//
18		//

Закључујемо да је обим квадрата једнак збиру датих обима сва три правоугаоника, па је $O = 18 + 28 + 14 = 60$ [**3 бода**]. Страница квадрата једнака је $60 : 4 = 15$ [**5 бодова**].

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа 10.02.2024.

V разред

1. Одреди све вредности природног броја x за које је тачна неједнакост

$$\frac{701}{1011} < \frac{13 \cdot x}{2022} < \frac{601}{674}.$$

2. Дато је неколико узастопних простих бројева. Одреди њихов збир ако је производ најмањег и највећег од тих бројева 589.
3. На дужи AB дате су тачке P , Q и R такве да је $A-P-Q-R-B$. Удаљеност између средишта дужи PQ и QR је 8 cm, а између средишта дужи AP и RB је 22 cm. Израчунај дужину дужи AB .
4. Природни бројеви од 1 до 2024 написани су један иза другог у низу: 123456789101112...20232024. Која цифра се налази тачно у средини тога низа?
5. Торта има облик коцке ивице 4 dm. Горња страна торте и све бочне стране премазане су шлагом. Након тога, торта је исечена на 64 парчића облика коцке ивице 1 dm, резovima паралелним странама коцке. Одреди колико има парчића торте који:
- а) немају стране премазане шлагом;
 - б) имају једну страну премазану шлагом;
 - в) имају две стране премазане шлагом.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 120 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

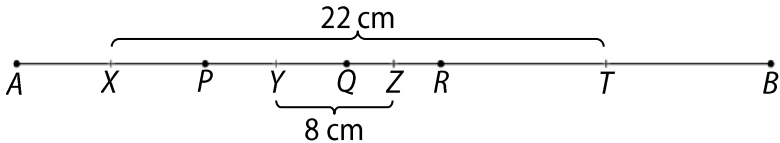
V РАЗРЕД

**Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.**

1. (МЛ 57/2) Како је $\frac{701}{1011} = \frac{1402}{2022}$ [2 бода] и $\frac{601}{674} = \frac{1803}{2022}$ [2 бода] то је $\frac{1402}{2022} < \frac{13 \cdot x}{2022} < \frac{1803}{2022}$ одакле је $1402 < 13 \cdot x < 1803$ [4 бода]. Из $13 \cdot x > 1402$, добијамо $x \geq 108$ [4 бода], а из $13 \cdot x < 1803$ добијамо $x \leq 138$ [4 бода]. Дакле, $x \in \{108, 109, \dots, 137, 138\}$ [4 бода].

2. (МЛ 57/1) Број 589 као производ два броја можемо записати само као $589 = 1 \cdot 589 = 19 \cdot 31$. Како 1 и 589 нису прости бројеви, то је једини начин да овај број представимо као производ два проста броја $19 \cdot 31$ [8 бодова]. Сви прости бројеви од 19 до 31 су: 19, 23, 29, 31 [10 бодова], а њихов збир је $19 + 23 + 29 + 31 = 102$ [2 бода].

3. Нека су X, Y, Z, T редом средишта дужи AP, PQ, QR и RB .

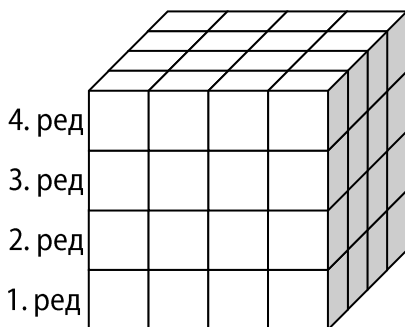


Како је $YZ = YQ + QZ = 8$ cm, то је $PR = PQ + QR = 2 \cdot YQ + 2 \cdot QZ = 2 \cdot (YQ + QZ) = 2 \cdot YZ = 16$ cm [6 бодова]. Како је $XT = XP + PR + RT = 22$ cm, то је $XP + RT = 6$ cm [3 бода]. Сада је $AP + RB = 2 \cdot (XP + RT) = 12$ cm [6 бодова], па је $AB = AP + RB + PR = 28$ cm [5 бодова].

4. Међу бројевима од 1 до 2024 има 9 једноцифрених, 90 двоцифрених, 900 троцифрених и 1025 четвороцифрених бројева [2 бода]. Они се записују помоћу $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1025 \cdot 4 = 6989$ цифара [5 бодова]. Дакле, потребно је одредити цифру на 3495. месту у овом низу [3 бода]. За запис једноцифрених, двоцифрених и троцифрених бројева потребно је 2889 цифара. Како је $3495 - 2889 = 606$ и како је $606 : 4 = 151$ (остатак 2), онда ће 3495. цифра бити 2.

цифра 152. четвороцифреног броја [**5 бодова**]. Број 1151 је 152. четвороцифрени број [**3 бода**], па је тражена цифра 1 [**2 бода**].

5.



а) Без премазаних страна су по 4 (унутрашње) мале коцке у 1, 2. и 3. реду. Дакле, укупно $4 + 4 + 4 = 12$ парчића торте нема ниједну премазану страну [**7 бодова**].

б) Тачно једну премазану страну имају по $3 \cdot 2$ мале коцке на свакој бочној страни и још 4 мале коцке горње основе велике коцке, дакле укупно $4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 = 28$ парчића има тачно једну премазану страну [**6 бодова**].

в) Тачно две премазане стране имају $4 \cdot 3$ мале коцке на бочним ивицама коцке и још 8 малих коцака горње основе. Дакле, укупно $12 + 8 = 20$ парчића торте имају тачно две премазане стране [**7 бодова**].

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа

10.02.2024.

VI разред

1. Ако је

$$A = 2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right) \text{ и } B = -121,2 : 12 - 12 \frac{1}{2} \cdot 1,2$$

израчунај $\frac{|A+B|}{9}$.

2. Кроз средиште S дијагонале BD правоугаоника $ABCD$ конструисана је права p која сече странице AB и CD у тачкама P и Q , редом. Докажи да је $SP = SQ$.

3. Дат је разломак $\frac{2023}{2024}$. Који број треба одузети од бројиоца и додати имениоцу, да би након скраћивања добили разломак $-\frac{3}{4}$?

4. На страницама AB , AC и BC троугла ABC одабране су, редом, тачке D , E и F , такве да је $AD = AE$ и $BD = BF$. Ако је $\angle EDF = 40^\circ$, израчунај меру угла ACB .

5. Одреди најмањи могући природни број дељив са 4, чији је збир цифара једнак 2024.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 120 минута.

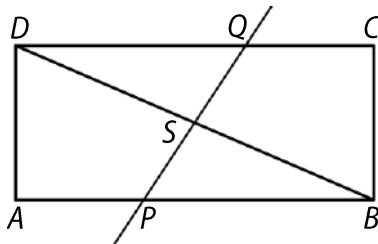
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

**Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.**

1. (МЛ 56/2) $A = 2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right) = 2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{8} \right)$ [2 бода] $= 2 + \frac{3}{2}$ [2 бода]
 $= 3,5$ [3 бода], $B = -121,2 : 12 - 12 \frac{1}{2} \cdot 1,2 = -10,1$ [3 бода] $- 15$ [3 бода]
 $= -25,1$ [2 бода], $\frac{|A+B|}{9} = \frac{|3,5 + (-25,1)|}{9} = \frac{21,6}{9}$ [3 бода] $= 2,4$ [2 бода].

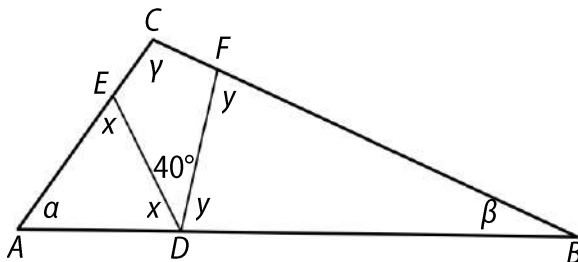
2. (МЛ 56/2) Уочимо троуглове SDQ и SBP . Како је $\sphericalangle SDQ = \sphericalangle SBP$ као углови на трансверзали [4 бода], $\sphericalangle DSQ = \sphericalangle BSP$ јер су унакрсни [4 бода] и $BS = SD$ јер је S средиште дијагонале [1 бод], то су троуглови SDQ и SBP подударни на основу става УСУ [6 бодова]. Како подударни троуглови имају једнаке одговарајуће елементе закључујемо да су странице SP и SQ међусобно једнаке [5 бодова].



3. Означимо тражени број са x . Ако одузмемо x од бројиоца и додамо имениоцу, добијамо једначину $\frac{2023-x}{2024+x} = -\frac{3}{4}$ (за $x \neq -2024$) [5 бодова], чије је решење $x = 14164$ [15 бодова], што је и тражени број.

4. Троуглови DEA и FDB су једнакократи ($AD = AE$ и $BD = BF$) [5 бодова]. Нека је $\sphericalangle ADE = x$ и $\sphericalangle BDF = y$. Тада је $x = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ и

$y = \frac{180^\circ - \beta}{2}$. Како је $x + y = 140^\circ$ то је $\frac{180^\circ - \alpha}{2} + \frac{180^\circ - \beta}{2} = 140^\circ$ одакле је $\alpha + \beta = 80^\circ$ [**10 бодова**]. Коначно, $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ [**5 бодова**].



5. Да бисмо добили најмањи природни број потребно је да цифру 9 употребимо максималан број пута. Како је $2024 = 224 \cdot 9 + 8$, то значи да тражени број има најмање 225 цифара [**2 бода**]. Међутим, како је тај број састављен само од цифара 9 и једне осмице и како нити један од бројева 89, 98 и 99 није дељив са 4, то не постоји 225-тоцифрени број са траженим особинама [**3 бода**]. Дакле, тражени број може да има најмање 226 цифара [**2 бода**]. Да би овај број био најмањи претпоставимо да је цифра највеће месне вредности 1. Тада збир преосталих 225 цифара мора да буде 2023 [**3 бода**]. То је могуће ако су 223 цифре 9, а преостале две цифре 9, 7 или 8, 8 [**5 бодова**]. Како је међу бројевима 79, 88, 89, 97, 98 и 99 само број 88 дељив са 4, то постоји тражени 226-тоцифрени број чији је збир цифара 2024 и који је дељив са 4 и то је број $\underbrace{199\dots 99}_{223 \text{ цифре}} 88$ [**5 бодова**].

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа

10.02.2024.

VII разред

1. Одреди цео број a и природан број n , тако да буде тачна једнакост:

$$a^n = \frac{0,125^4 \cdot (-4,5)^6 \cdot (-0,375)^6 \cdot 125}{2,25^9 \cdot 0,5^{18}}.$$

2. На колико начина се број 2024 може приказати као производ три различита природна броја? Редослед чинилаца није битан.
3. Странице троугла ABC су $AB = 21$ cm, $BC = 17$ cm, $AC = 10$ cm. У унутрашњој области троугла дата је тачка M чије је растојање од странице AB једнако 2 cm, а од странице BC једнако 4 cm. Одреди растојање тачке M од странице AC .
4. Одреди све природне бројеве мање од 1000 чији је производ са бројем 7 једнак кубу неког природног броја.
5. Нека је D тачка хипотенузе AB правоуглог троугла ABC , таквог да је $CA = CD = \sqrt{5}$ и $CB = 2\sqrt{5}$. Израчунај обим и површину троугла BCD .

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 120 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

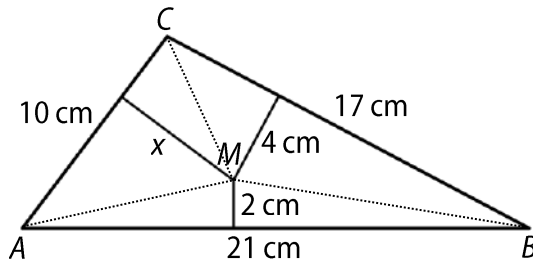
**Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.**

1. Како је $0,125^4 = \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{1}{2^{12}}$ [2 бода], $(-4,5)^6 = 4,5^6 = \left(\frac{9}{2}\right)^6 = \frac{3^{12}}{2^6}$ [2 бода], $(-0,375)^6 = 0,375^6 = \left(\frac{3}{8}\right)^6 = \frac{3^6}{2^{18}}$ [2 бода], $125 = 5^3$ [1 бод], $2,25^9 = \left(\frac{9}{4}\right)^9 = \frac{3^{18}}{2^{18}}$ [2 бода] и $0,5^{18} = \left(\frac{1}{2}\right)^{18} = \frac{1}{2^{18}}$ [2 бода], то је

$$\frac{\frac{1}{2^{12}} \cdot \frac{3^{12}}{2^6} \cdot \frac{3^6}{2^{18}} \cdot 5^3}{\frac{3^{18}}{2^{18}} \cdot \frac{1}{2^{18}}} = 5^3$$
 [7 бодова], па је $a = 5$ [1 бод] и $n = 3$ [1 бод].

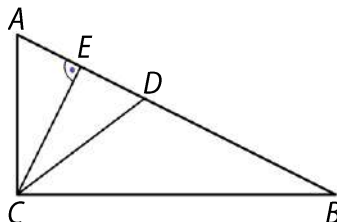
2. $2024 = 1 \cdot 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ [6 бодова]. Уочимо све производе у којима је 1 један од чинилаца. Тада је $2024 = 1 \cdot 2 \cdot 1012 = 1 \cdot 4 \cdot 506 = 1 \cdot 8 \cdot 253 = 1 \cdot 11 \cdot 184 = 1 \cdot 22 \cdot 92 = 1 \cdot 23 \cdot 88 = 1 \cdot 44 \cdot 46$ [сваки производ по 1 бод]. Ако је 2 најмањи од чинилаца, све могућности $2 \cdot 4 \cdot 253 = 2 \cdot 11 \cdot 92 = 2 \cdot 22 \cdot 46 = 2 \cdot 23 \cdot 44$ [сваки производ по 1 бод]. Ако је 4 најмањи од чинилаца, сви производи су $4 \cdot 11 \cdot 46 = 4 \cdot 22 \cdot 23$ [сваки производ по 1 бод]. Ако је 8 најмањи чинилац, постоји само један производ $8 \cdot 11 \cdot 23$ [1 бод]. За сваки нетачно наведени производ одузети по 1 бод.

3. Површину троугла ABC можемо израчунати користећи Херонов образац: $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, где је s полуобим троугла, тј. $s = 24$ см, па је $P = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} = 84$ см² [8 бодова]. Са друге стране површину троугла ABC можемо израчунати као збир површина троуглова ABM , BMC и AMC , у којима су висине заправо растојања тачке M од страница троугла. Следи да је $P = \frac{21 \cdot 2}{2} + \frac{17 \cdot 4}{2} + \frac{10 \cdot x}{2} = 84$ см² [8 бодова], одакле је тражено растојање $x = 5,8$ см [4 бода].



4. (МЛ 57/2) Нека је x такав број. Тада је $7x = y^3$, за неки природан број y . Због дељивости леве стране са 7, следи да таква мора бити и десна страна, па је $y = 7k$, за неки природан број k [5 бодова]. Одатле следи да је $7x = 7^3 \cdot k^3$, односно $x = 49 \cdot k^3$ [5 бодова]. Ако је $k \geq 3$, онда је $x = 49 \cdot k^3 \geq 49 \cdot 3^3 = 1323 > 1000$, што се противи услови задатка да је $x < 1000$. Дакле, важи $k < 3$ [6 бодова]. За $k = 1$ је $x = 49$ [2 бода], а за $k = 2$ је $x = 392$ [2 бода].

5. (МЛ 58/1) Нека је E подножје висине из темена C на хипотенузу AB . На основу Питагорине теореме је $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$ [1 бод]. Из површине троугла ABC је $P = \frac{AC \cdot BC}{2} = 5 = \frac{AB \cdot EC}{2} = \frac{5 \cdot EC}{2}$, одакле следи да је $EC = 2$ [4 бода]. Даље, из Питагорине теореме у једнакокраном троуглу ADC је $ED = AE = \sqrt{AC^2 - EC^2} = 1$ [4 бода], па је $BD = AB - AD = 3$ [5 бодова]. Обим троугла BCD је онда једнак $3 + 3\sqrt{5}$ [3 бода]. Површину троугла BCD можемо добити када од површине троугла ABC одузмемо површину троугла ACD и она је $P = 5 - \frac{AD \cdot EC}{2} = 3$ [3 бода].

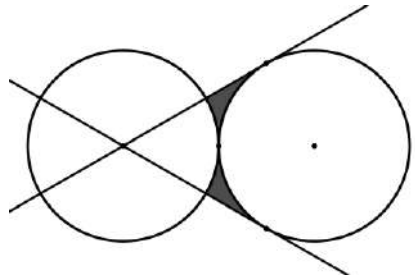


ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа 10.02.2024.

VIII разред

1. Израчунај вредност израза $\frac{2^{7n+3} \cdot 2^{6n-5}}{2^{12n} : 2^{9n}} : \frac{2^{7n-9} \cdot 2^{5n-4}}{2^{2n-3} \cdot 2^3} - 3 \cdot 2^3$.
2. Основна ивица правилне шестостране призме четири пута је краћа од њене висине, а збир дужина висине и основне ивице је 30 cm. Израчунај површину и запремину те призме.
3. Раја, Гаја и Влаја желе да поделе међусобно кликере. Прво Раја узме трећину свих кликера, Гаја једну трећину остатка и Влаја једну трећину кликера преосталих након Раје и Гаје. Остатак кликера су поделили на једнаке делове. Уколико је Гаја добио 130 кликера, колико је кликера било пре деобе?
4. Вања у својој касици има само новчиће од 2 и 5 динара. На колико начина може да купи лопту која кошта 2024 динара користећи само своју уштеђевину из касице? (Подразумева се да има довољно новчића у касици за сваку комбинацију.)
5. Две кружнице једнаких полупречника додирују се споља. Из центра једне кружнице конструисане су тангенте на другу кружницу (види слику). Одреди површину освенчене фигуре, ако је полупречник једне кружнице r .



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 120 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1.

$$\begin{aligned} \frac{2^{7n+3} \cdot 2^{6n-5}}{2^{12n} : 2^{9n}} : \frac{2^{7n-9} \cdot 2^{5n-4}}{2^{2n-3} \cdot 2^3} - 3 \cdot 2^3 &= \frac{2^{13n-2} \text{ [2 бода]}}{2^{3n} \text{ [2 бода]}} : \frac{2^{12n-13} \text{ [2 бода]}}{2^{2n} \text{ [2 бода]}} - 3 \cdot 2^3 \\ &= 2^{10n-2} \text{ [2 бода]} : 2^{10n-13} \text{ [2 бода]} - 3 \cdot 2^3 \\ &= 2^{11} \text{ [2 бода]} - 3 \cdot 2^3 = 2^3 \cdot (2^8 - 3) = 8 \cdot 253 = 2024 \text{ [6 бодова]}. \end{aligned}$$

2. (МЛ 56/5) Означимо основну ивицу призме са a , а висину са H . Из услова $H = 4a$ и $a + H = 30$ см, добијамо $a = 6$ см, $H = 24$ см [4 бода]. Површина базе призме је површина правилног шестоугла, па је $B = 54\sqrt{3}$ см² [4 бода], а површина омотача је $M = 6aH = 864$ см² [4 бода]. Површина призме је $P = 2B + M = 108 \cdot (\sqrt{3} + 8)$ см² [4 бода], а запремина $V = BH = 1296\sqrt{3}$ см³ [4 бода].

3. Означимо број кликера пре деобе са x . Раја је узео $\frac{1}{3}x$ кликера.

Преостало је $\frac{2}{3}x$ кликера. Гаја је узео $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{2}{9}x$ кликера [2 бода],

а преостало је $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{4}{9}x$ кликера. Влаја је узео $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}x = \frac{4}{27}x$

кликера [3 бода], а преостало је $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}x = \frac{8}{27}x$ кликера [4 бода]. Овај

остатак поделили су на једнаке делове, па је свако добио по $\frac{8}{27}x : 3 = \frac{8}{81}x$ кликера [3 бода]. Дакле, Гаја је добио $\frac{2}{9}x + \frac{8}{81}x = \frac{26}{81}x$

кликера [4 бода], па је $\frac{26}{81}x = 130$, одакле је $x = 405$ [4 бода]. Дакле,

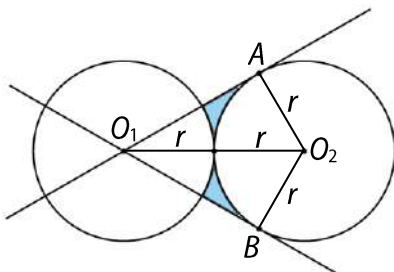
пре деобе је било 405 кликера.

4. Означимо са x и y број новчића од 2 и 5 динара утрошених током куповине. Услов задатка се своди на $2x + 5y = 2024$ [2 бода], при чему су x и y ненегативни цели бројеви [2 бода]. Како је

$$5y = 2 \cdot (1012 - x) \text{ [3 бода],}$$

и десна страна једнакости је паран број, то и $5y$ мора бити парно, па је y паран број [2 бода]. Нека је $y = 2k$, за неко $k \in \mathbb{N}_0$ [2 бода] јер је $y \in \mathbb{N}_0$. Заменом y у претходној једнакости добијамо $x = 1012 - 5k$ [4 бода]. Дакле, свако решење је облика $(1012 - 5k, 2k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Како је $x \geq 0$, то је $1012 - 5k \geq 0$, па добијамо да је $k \leq 202$ [2 бода], а како је $0 \leq k \leq 202$, то имамо 203 решења полазне Диофантове једначине [3 бода], тј. Вања може да плати лопту на 203 различита начина.

5. (МЛ 56/4) Означимо тачке као на слици. Правоугли троуглови O_1O_2A и O_1O_2B имају подударне катете $O_2A = O_2B = r$ и заједничку хипотенузу $O_1O_2 = 2r$, па су ови троуглови подударни (став ССУ), па је и четвороугао AO_1BO_2 делтоид.



У уоченим правоуглим троугловима је једна катета два пута краћа од хипотенузе па је $\sphericalangle AO_1O_2 = \sphericalangle BO_1O_2 = 30^\circ$ и $\sphericalangle AO_2O_1 = \sphericalangle BO_2O_1 = 60^\circ$ [4 бода]. Површина освенчене фигуре једнака је разлици површине P_0 делтоида AO_1BO_2 и површина P_1 и P_2 два кружна исечка: круга k_1 полупречника r са централним углом од $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ и круга k_2 полупречника r са централним углом од $2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ [4 бода]. Површину делтоида рачунамо као двоструку површину једног од троуглова O_1O_2A или O_1O_2B са катетама r и $r\sqrt{3}$ (или као површину делтоида дијагонала $2r$ и $r\sqrt{3}$), па је $P_0 = r^2\sqrt{3}$ [3 бода]. Површина

кружних исечака је $P_1 = \frac{1}{6}r^2\pi$ [3 бода] и $P_2 = \frac{1}{3}r^2\pi$ [3 бода]. Тражена

површина једнака је $P = P_0 - (P_1 + P_2) = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$ [3 бода].